

第六章 导数及其应用

6.1 导数

6.1.1 函数的平均变化率

刷基础

1. A 【解析】 $\Delta y = f(3) - f(1) = 3^3 - 3^1 = 24$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{3-1} = 12$. 故选 A.

2. B 【解析】由题意有 $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$, $k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 - (x_0 - \Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 - \Delta x$,

所以 $k_1 - k_2 = 2\Delta x > 0 \Rightarrow k_1 > k_2$, 故选 B.

3. C 【解析】函数 $f(x)$ 在区间上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 由函数 $f(x)$ 的图象可得, 在区间 $[4, 7]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, 即函数

$f(x)$ 在区间 $[4, 7]$ 上的平均变化率小于 0. 在区间 $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ 且 Δx 相同, 故只需找 Δy 最大的即可, 由 $f(x)$ 的图象可知, 函数

$f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 Δy 最大, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 最大, 所以

函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的平均变化率最大. 故选 C.

4. C 【解析】因为函数 $y = f(x) = x^2 - m^2$ 在区间 $[2, t]$ 上的平均变化率为 5, 所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(t^2 - m^2) - (2^2 - m^2)}{t - 2} = 5$, 解得 $t = 3$, 故选 C.

5. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$.

(2) 由函数 $f(x)$ 的图象知, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ x+1, & 1 < x \leq 3, \end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

6. A 【解析】由题意可得平均速度是 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \frac{2(2 + \Delta t)^2 - 2 - (2 \times 4 - 2)}{\Delta t} = \frac{8\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 8 + 2\Delta t$. 故选 A.

7. B 【解析】从 4 m 到 9 m 这一段金属棒的平均线密度是 $\frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{3(\sqrt{9} - \sqrt{4})}{9 - 4} = \frac{3}{5}$ (kg/m).

8. A 【解析】由题中图象可知, 对相同的 Δt , 学校 W_1 用电量的减少量大于

学校 W_2 用电量的减少量, 说明学校 W_1 用电量下降力度越大, 所以 W_1 比 W_2 节能效果好, A 正确, C 错误;

由题中图象可知, $\frac{W_1(t_0) - W_1(0)}{t_0} < \frac{W_2(t_0) - W_2(0)}{t_0}$, 则 W_1 的用电量在区间 $[0, t_0]$ 上的平均变化率比 W_2 的用电量在区间 $[0, t_0]$ 上的平均变化率要小, B 错误;

由于曲线 $W = W_1(t)$ 和曲线 $W = W_2(t)$ 不重合, D 错误. 故选 A.

6.1.2 导数及其几何意义

刷基础

1. C 【解析】因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x + b(\Delta x)^2}{\Delta x} = a + b\Delta x$,

所以 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a + b\Delta x) = a$, 即 $f'(x_0) = a$. 故选 C.

2. A 【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 3$,

避坑: 分母必须是自变量的改变量

所以 $f'(x_0) = 6$, 故选 A.

3. ABC 【解析】由题图知, 在 $[0, t_1]$ 时间段内位移—时间图象是直线, 斜率不变, 故汽车在 $[0, t_1]$ 时间段内每一时刻的瞬时速度相同, 故 A 正确;

在 $[t_1, t_2]$ 时间段内, 位移—时间图象是曲线, 曲线的切线斜率逐渐增大, 故汽车在 $[t_1, t_2]$ 时间段内不断加速行驶, 故 B 正确;

在 $[t_2, t_3]$ 时间段内, 位移—时间图象是曲线, 曲线的切线斜率逐渐减小, 故汽车在 $[t_2, t_3]$ 时间段内不断减速行驶, 故 C 正确;

由题图易知汽车在 t_2 时刻的瞬时速度大于 0, 在 $[t_3, t_4]$ 时间段内, 位移不变, 故 t_4 时刻的瞬时速度为 0, 故 D 错误.

故选 ABC.

4. -1 在第 3 h 附近, 原油温度大约以 $1^\circ\text{C}/\text{h}$ 的速率下降 【解析】自变量 x 从 3 变化到 $3 + \Delta x$ 的过程中, $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (\Delta x)^2 - \Delta x$,

则该函数的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x - 1$.

当 Δx 趋于 0 时, 平均变化率趋于 -1, 则在第 3 h 时, 原油温度的瞬时变化率为 $-1^\circ\text{C}/\text{h}$, 即在第 3 h 附近, 原油温度大约以 $1^\circ\text{C}/\text{h}$ 的速率下降.

5. D 【解析】因为 $y = x^2 + \frac{3}{x}$, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + \frac{3}{x + \Delta x} - (x^2 + \frac{3}{x})}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[2x + \Delta x + \frac{-3}{x(x + \Delta x)} \right] = 2x - \frac{3}{x^2}, \text{ 所以}$$

$$k = 2 \times 1 - \frac{3}{1} = -1 = \tan 135^\circ, \text{ 所以曲线}$$

$y = x^2 + \frac{3}{x}$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线的倾斜角为 135° , 故选 D.

6. A 【解析】由题知, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = -2$, $\therefore$ 曲线 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线斜率为 $k = -2$. 又 $\because f(2) = 2$, $\therefore$ 切线过点 $(2, 2)$, 代入直线的点斜式方程得 $y - 2 = -2(x - 2)$, 即 $2x + y - 6 = 0$. 故选 A.

链接教材 本题是教材第 73 页例 5 的变式, 考查导数的几何意义. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率存在, 则斜率 $k = f'(x_0)$, 切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

7. B 【解析】由题意可知曲线在点 $(0, b)$ 处的切线的斜率

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^3 + a(0 + \Delta x) + b - b}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + a] = a,$$

又曲线在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $x + y - 1 = 0$, 所以 $a = -1$,

由点 $(0, b)$ 在切线上, 可得 $0 + b - 1 = 0$, 即 $b = 1$. 故选 B.

特别注意 对于条件“曲线在点 P 处的切线为 l ”, 其包含两个信息, 一是点 P 为曲线与切线的公共点, 二是点 P 处的导数值等于切线的斜率, 不要遗漏信息.

刷易错

★易错点 1 忽略导数定义式中 $\Delta x, \Delta y$ 的对应关系

8. A 【解析】已知 $f'(1) = \frac{1}{2\,026}$,

由导数的定义可知,

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{2\,026}.$$

设 $h = -2\,026\Delta x$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $h \rightarrow 0$, 且

$$\Delta x = -\frac{h}{2\,026},$$

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 - 2\,026\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{-\frac{h}{2\,026}}$$

$$= -2\,026 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$= -2\,026 f'(1) = -1. \text{ 故选 A.}$$

易错警示 由导数的定义可知, 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ 它仅}$$

与 x_0 有关, 与 Δx 无关. 因此使用导数公式时要明确公式的形式, 当分子为 $f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0)$ 时, 分母也应该是 $m\Delta x$, 要注意公式的变形.

★易错点2 没有正确理解导数的几何意义致误

9. D 【解析】曲线的切线和曲线除有一个公共切点外,还可能其他的公共点,故 A, B 错误; $f'(x_0)$ 不存在,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率不存在,但切线可能存在,故 C 错误, D 正确.

易错警示 曲线上某点的导数的几何意义是曲线在该点处的切线的斜率,若 $f'(x_0)$ 不存在,不一定无切线,有可能切线的倾斜角为 90° ,此时只是斜率不存在而已,但切线是存在的.

★易错点3 没有把握好切点的“双重身份”(既在切线上,又在原函数图象上)致误

10. C 【解析】由题可知 $f'(0)=2$,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 $y-f(0)=2(x-0)$,即 $y=2x+f(0)$,所以 $f(0)=-1$,所以 $f(0)+f'(0)=1$. 故选 C.

易错警示 只有关心好切点的“双重身份”(既在切线上,又在原函数图象上),才能把条件用清楚,从而解决问题. 一定要注意切线的斜率 $k=f'(x_0)$,另外注意切点 $(x_0, f(x_0))$ 的坐标既符合原来的函数解析式,也符合切线的方程.

刷提升

1. A 【解析】已知函数 $f(x)$ 可导,

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x)-f(1)+f(1)-f(1+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= -2f'(1)-f'(1)=-3f'(1)=3, \\ & \text{所以 } f'(1)=-1. \text{ 故选 A.} \end{aligned}$$

2. C 【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $[1, 3]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} =$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{2} = 2f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ 在 } x=m \text{ 时的瞬} \\ & \text{时变化率为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(m+\Delta x)-f(m)}{\Delta x} = \\ & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(m+\Delta x)^2 - \frac{1}{2}m^2}{\Delta x} = \\ & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\Delta x + m \right) = m, \\ & \text{所以 } m=2. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

3. D 【解析】由题知,直线 l 扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数,且由圆的对称性,先看前半关于时间 t 的函数图象,可知面积 S 关于时间 t 的

函数的变化率是逐渐变大的,故此段函数的图象的切线的斜率逐渐变大,再看后半关于时间 t 的函数图象,可知面积 S 关于时间 t 的函数的变化率是逐渐减小的,故此段函数的图象的切线的斜率逐渐减小,观察选项知, D 选项符合题意. 故选 D.

4. ACD 【解析】对于 A: 由题图和导数的几何意义可得,对于 V_1 , 存在 $t_0 \in (0, t_1)$, 使得 $V(t_0)=V_1$, 故 A 正确; 对于 B: 由题图和导数的几何意义可知,小明行走的速度在 OA 段逐渐变大,在 AB 段又逐渐减小,故 B 错误; 对于 C: $V(t_1)$ 是 $t=t_1$ 处的切线斜率, V_1 是割线 OA 的斜率,由题图可知, $t=t_1$ 处的切线比割线 OA 更陡,即切线斜率 $>$ 割线斜率,故 $V(t_1) > V_1$, 故 C 正确; 对于 D: 设 $t_1-t_0=\Delta t_1$, $t_2-t_1=\Delta t_2$, 由 OA 的延长线与直线 $S=S_0$ 的交点在点 B 的右侧可知, $\Delta t_1 > \Delta t_2$,

$$\begin{aligned} \therefore V_1 &= \frac{S_0}{2\Delta t_1}, V_2 = \frac{S_0}{\Delta t_1 + \Delta t_2}, V_3 = \frac{S_0}{2\Delta t_2}, \\ \therefore 2\Delta t_1 > \Delta t_1 + \Delta t_2 > 2\Delta t_2, \therefore V_1 < V_2 < V_3, \\ & \text{故 D 正确. 故选 ACD.} \end{aligned}$$

5. (0,0) 【解析】设 $P(x_0, y_0)$, 则 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 + 2(x_0+\Delta x) - (x_0^2 + 2x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + 2 + \Delta x) = 2x_0 + 2$, 因为点 P 处的切线垂直于直线 $x+2y=0$, 所以点 P 处的切线的斜率为 2, 所以

点悟: 斜率存在且不为 0 的两直线互相垂直, 则斜率之积等于 -1

$2x_0 + 2 = 2$, 解得 $x_0 = 0$, 则 $y_0 = 0$, 即点 P 的坐标是 $(0,0)$.

6. -1 【解析】因为 $f(x) = x^3 - x + 3$, 所以 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3x^2 - 1$, 所以 $f'(1) = 2$, 即 $\tan \theta = 2$,

$$\text{所以 } \frac{\cos \theta - 2\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cos \theta - 2\sin \theta}{\cos \theta} = -1.$$

7. 【解】(1) 设切点的坐标为 $Q(m, f(m))$, 由 $f(x) = x^3 - x$, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) - (x^3 - x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + 3x^2 + 3x \cdot \Delta x - 1] \\ &= 3x^2 - 1, \end{aligned}$$

则曲线 $y=f(x)$ 在点 Q 处的切线方程为 $y-(m^3-m) = (3m^2-1)(x-m)$, 代入点 $P(1,0)$ 的坐标, 得 $-(m^3-m) = (3m^2-1)(1-m)$, 整理得 $-m(m+1)(m-1) = (3m^2-1) \cdot (1-m)$, 化简得 $(2m+1)(m-1)^2 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 1$.

当 $m=1$ 时, 切线方程为 $y=2x-2$, 即 $2x-y-2=0$;

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时, 切线方程为 $y=-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, 即 $x+4y-1=0$.

故曲线 $y=f(x)$ 经过点 $P(1,0)$ 的切线方程为 $2x-y-2=0$ 或 $x+4y-1=0$.

(2) 已知点 $M(a, f(a))$ 处的切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup$

$$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right),$$

$$\therefore -1 < f'(a) < 1, \text{ 即 } -1 < 3a^2 - 1 < 1,$$

$$\text{解得 } -\frac{\sqrt{6}}{3} < a < 0 \text{ 或 } 0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

规律方法 求曲线 $y=f(x)$ 的切线方程

若已知曲线 $y=f(x)$ 和点 $P(x_0, y_0)$, 求曲线过点 P 的切线方程, 可分以下几步完成:

第一步: 设出切点坐标 $P'(x_1, f(x_1))$; 第二步: 写出曲线在点 $P'(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$; 第三步: 将点 P 的坐标 (x_0, y_0) 代入切线方程求出 x_1 ; 第四步: 将 x_1 的值代入方程 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ 可得过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程.

6.1.3 基本初等函数的导数

刷基础

1. B 【解析】对于 A, $\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)' = 0$, 故 A 错误;

对于 B, $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$, 故 B 正确;

对于 C, $(2^x)' = 2^x \ln 2$, 故 C 错误;

对于 D, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 D 错误. 故选 B.

2. A 【解析】由题知 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 所以

$$f(1) = \ln 1 = 0, f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

所以 $f(1)+f'(1)=0+1=1$. 故选 A.

3. B 【解析】由题意, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = f_1'(x) = \cos x$, $f_3(x) = f_2'(x) = -\sin x$, $f_4(x) = f_3'(x) = -\cos x$, $f_5(x) = f_4'(x) = \sin x = f_1(x)$, 所以 $f_{n+4}(x) = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_+$. 则 $f_{2028}(x) = f_4(x) = -\cos x$. 故选 B.

4. D 【解析】令 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$, 由 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = 1$, 可得 $f'(x_0) = 1$, 即 $\cos x_0 = 1$, 又 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $x_0 = 0$, 所以 $\sin x_0 = 0$.

故选 D.

5. 【解】(1) $y' = (x\sqrt{x})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

(2) $\because y = \log_2 x^2 - \log_2 x = \log_2 x$,
 $\therefore y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$.

(3) $\because y = -2\sin \frac{x}{2} \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{4}\right)$
 $= 2\sin \frac{x}{2} \left(2\cos^2 \frac{x}{4} - 1\right)$
 $= 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$,

点悟: 二倍角公式的应用

$\therefore y' = (\sin x)' = \cos x$.

链接教材 本题是教材第 76 页例 1 的同类试题,考查基本初等函数的求导,难度虽然不大,但是对函数准确求导是利用导数解决函数问题的基础,需要注意 (1) $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 应加深对公式的理解,从而强化记忆.

(2) 对不能直接运用公式求导的要进行适当变形,如 $y = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$, $y = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ 等.

6. A 【解析】因为 $y' = (\sin x)' = \cos x$, 所以曲线 $y = \sin x$ 在点 $T(2\pi, 0)$ 处的切线的斜率 $k = \cos 2\pi = 1$, 所以曲线 $y = \sin x$ 在点 $T(2\pi, 0)$ 处的切线方程是 $y - 0 = 1 \times (x - 2\pi)$, 即 $x - y - 2\pi = 0$. 故选 A.

7. B 【解析】设切点为 (x_0, a^{x_0}) , 因为 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 所以 $f'(x) = a^x \ln a$.

由导数的几何意义可得 $\begin{cases} a^{x_0} \ln a = 3e, \\ a^{x_0} = 3ex_0, \end{cases}$

所以 $a^{x_0} \ln a = \frac{a^{x_0}}{x_0}$, 即 $a^{x_0} \ln a^{x_0} = a^{x_0}$, 解得

$a = e^3$, 故选 B.

8. C 【解析】易知函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因此点 $P(0, -1)$ 不是切点,

设切点坐标为 $(x_0, \ln x_0)$, $x_0 > 0$, 则由 $y = \ln x$ 可得 $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, 此时切

线斜率为 $\frac{1}{x_0}$, 因此切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

代入点 $P(0, -1)$ 的坐标可得 $-1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0)$,

即 $\ln x_0 = 0$, 解得 $x_0 = 1$, 即切点坐标为 $(1, 0)$. 故选 C.

9. A 【解析】设与直线 $y = x$ 平行且与曲线 $y = f(x) = \ln x$ 相切的直线为 l , l 与曲线 $y = f(x)$ 的切点坐标为 $(x_0,$

$\ln x_0)$. 由 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 得 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1$, 解得 $x_0 = 1$, 即切点坐标为 $(1, 0)$.

点 $(1, 0)$ 到直线 $y = x$ 的距离 $d =$

$\frac{|1 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故函数 $f(x) = \ln x$ 图象上一点 P 到直线 $y = x$ 的最短距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

名师点拨 对于具有某些特征的函数图象或曲线,可以借助图象和切线求解图象上的点到直线距离的最值问题.如本题的对数函数、选择性必修第一册学习过的椭圆均适用于此方法.

10. D 【解析】因为 $y' = (n+1)x^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 曲线 $y = x^{n+1}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = n+1$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 所以在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = (n+1) \cdot (x - 1)$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 与 x 轴交点的横坐标 $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. 所以数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项的积为 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, 所以数列 $\{x_n\}$ 的前 2 027 项的积为 $\frac{1}{2\,028}$. 故选 D.

11. $y = x + 1$ $\frac{2\,027}{2\,026}$ 【解析】 $\because f(x) = e^x$,
 $\therefore f'(x) = e^x$, $\therefore f'(0) = e^0 = 1$,
 $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$.
 $\therefore f\left(\frac{1}{2\,026}\right) = e^{\frac{1}{2\,026}} = \sqrt[2\,026]{e}$, $\therefore$ 由题意
 令 $x = \frac{1}{2\,026}$, 得 $e^{\frac{1}{2\,026}} \approx \frac{1}{2\,026} + 1 = \frac{2\,027}{2\,026}$.

6.1.4 求导法则及其应用

课时 1 导数的四则运算法则

刷基础

1. B 【解析】选项 A: $(\sin x)' = \cos x$, 故 A 正确;

选项 B: $(e^x + \ln 2)' = e^x$, 故 B 错误;

选项 C: $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$, 故 C 正确;

选项 D: $\left(\frac{2}{3x+1}\right)' = -\frac{6}{(3x+1)^2}$, 故 D 正确. 故选 B.

链接教材 本题是教材第 84 页例 1 的同类试题,考查导数的四则运算法则,导数的四则运算法则在对函数求导中常有涉及,一定要牢牢掌握.

对于较复杂的函数解析式,应先进行适当的化简变形,化为较简单的函数的和、差、积、商的形式后再求导,可简化求导过程.

2. C 【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x - f'(1)$,
 所以 $f'(1) = 1 - 2 - f'(1)$,

解得 $f'(1) = -\frac{1}{2}$. 故选 C.

规律方法 (1) $f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的区别与联系: $f'(x)$ 是一个函数, $f'(x_0)$ 是函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值 (常数), 所以 $[f'(x_0)]' = 0$.

(2) 求 $f'(x_0)$ 时,应先求导再代入求值.

3. BCD 【解析】对于 A, $f(x) = 3\cos x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = -3\sin x$, $f'(x)$ 为奇函数, 图象关于 y 轴对称, 不符合题意; 对于 B, $f(x) = x^3 + x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f'(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意;

对于 C, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$,

$f'(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意;

对于 D, $f(x) = 2x - 3$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 2$, $f'(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意. 故选 BCD.

4. A 【解析】由函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$, 可得 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$,
 可得 $f'(1) = -2$ 且 $f(1) = -1$, 即切线的斜率 $k = -2$, 切点坐标为 $(1, -1)$, 所以 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 1 = 0$. 故选 A.

5. BC 【解析】直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 能作为函数图象的切线, 即函数图象存在某点处的导数值为 $\frac{1}{2}$.

选项 A, $f(x) = \frac{1}{x}$, 故 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 令

$-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$, 无解, 故 A 不正确;

选项 B, $g(x) = x \ln x$, 故 $g'(x) = \ln x + 1$, 令 $\ln x + 1 = \frac{1}{2}$, 得 $x = e^{-\frac{1}{2}}$, 故 B

正确;

选项 C, $m(x) = \sin x$, 故 $m'(x) = \cos x$,

令 $\cos x = \frac{1}{2}$, 解得 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

或 $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 C 正确;

选项 D, $n(x) = e^x + x$, 故 $n'(x) = e^x + 1$,

令 $e^x + 1 = \frac{1}{2}$, 故 $e^x = -\frac{1}{2}$, 无解, 故 D

不正确. 故选 BC.

6. 【解】(1) 直线 $y = x + 2$ 的斜率为 1, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 1,

由 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x, a \in \mathbf{R}$, 得 $f'(x) =$

$-\frac{2}{x^2} + \frac{a}{x}$, 则 $f'(1) = -2 + a = 1$, 所以 $a = 1$.

(2) 若 $a = 0$, 则 $f(x) = \frac{2}{x}$, 定义域为

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, 作

出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

由图可知过点 $P(1,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线, 切线斜率一定存在, 且切点不为点 P .

设切点为 $Q(x_0, \frac{2}{x_0})$, 切线

斜率为 k , 则 $k=f'(x_0)=\frac{2}{x_0^2}$,

又因为切线过 P, Q 两点, 所以 $k=\frac{2-0}{x_0-1}=\frac{2}{x_0^2-x_0}$, 所以 $\frac{2}{x_0^2-x_0}=\frac{2}{x_0^2}$,

解得 $x_0=\frac{1}{2}$ 或 $x_0=0$ (舍去).

所以 $Q(\frac{1}{2}, 4)$, $k=f'(x_0)=-\frac{2}{x_0^2}=-8$,

则切线方程为 $y-0=-8(x-1)$, 即 $8x+y-8=0$.

令 $x=0$, 则 $y=8$, 则切线横截距为 1, 纵截距为 8, 所以此切线与坐标轴围成的

三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 8 = 4$.

名师点拨 (1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是指 P 为切点, 斜率 $k=f'(x_0)$ 的切线, 是唯一的一条切线;

(2) 曲线 $y=f(x)$ 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线, 是指切线经过点 P , 点 P 可以是切点, 也可以不是切点, 而且这样的直线可能有多条.

7. B 【解析】 $\because f(x)=2e^x-f'(0)x$,
 $\therefore f'(x)=2e^x-f'(0)$,
 $\therefore f'(0)=2-f'(0)$, 即 $f'(0)=1$,
 $\therefore f'(x)=2e^x-1>-1$.

又点 P 为函数 $f(x)$ 图象上的任意一点, 点 P 处的切线的倾斜角为 α ,
 $\therefore \tan \alpha > -1$. $\because \alpha \in [0, \pi)$, $\therefore \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$. 故选 B.

8. C 【解析】由函数 $f(x)=\frac{kx+1}{x}$ 和 $g(x)=\ln x$, 可得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,

$g'(x)=\frac{1}{x}$,

设两曲线公共点的横坐标为 t , 可得 $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $g'(t)=\frac{1}{t}$ ($t>0$),

由公共点处的切线互相垂直, 可得 $f'(t)g'(t)=-1$, 即 $\frac{1}{t^3}=1$, 解得 $t=1$,

又由 $f(1)=g(1)$, 可得 $k+1=0$, 解得 $k=-1$. 故选 C.

刷提升

1. A 【解析】由题设得 $f'(x)=2mx+\frac{1}{x}$, 则 $f'(1)=2m+1$, 而 $f(1)=m$, 所以函数 $f(x)=mx^2+\ln x$ 的图象在 $x=1$ 处

的切线的方程为 $y-m=(2m+1)(x-1)$, 令 $x=0$, 则 $y=-m-1=2$, 可得 $m=-3$. 故选 A.

2. C 【解析】函数 $f(x)=ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$,
 求导得 $f'(x)=ae^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) + \frac{be^{x-1}(x-1)}{x^2}$, 显然 $f'(1)=e$, 因此 $ae=e$, 解得 $a=1$. 故选 C.

3. A 【解析】因为函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$, 所以 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+x(x-a_2)(x-a_3)+x(x-a_1)(x-a_3)+x(x-a_1)(x-a_2)$,
 所以 $f'(0)=(0-a_1)(0-a_2)(0-a_3)+0=-a_1a_2a_3$.

又因为 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$, 所以 $f'(0)=-a_1a_2a_3=-2^{\frac{3^2+3}{2}}=-64$. 故选 A.

4. C 【解析】因为过点 $(2, m)$ 的切线与直线 $y=11x+1$ 平行, 所以切线的斜率 $k=11$.

对 $f(x)=x^3-x$ 求导得 $f'(x)=3x^2-1$, 设切点横坐标为 x_0 , 则切线斜率满足 $f'(x_0)=3x_0^2-1=11$, 解得 $x_0=2$ 或 $x_0=-2$.

又切线方程为 $y-(x_0^3-x_0)=11(x-x_0)$, 因为切线过点 $(2, m)$, 将 $x=2, y=m$ 代入得, $m=11(2-x_0)+x_0^3-x_0=x_0^3-12x_0+22$.

当 $x_0=2$ 时, $m=2^3-12 \times 2+22=6$,
 当 $x_0=-2$ 时, $m=(-2)^3-12 \times (-2)+22=38$,
 因此 $m=6$ 或 38 . 故选 C.

5. D 【解析】根据题意可知 $f(x)=x^2+aln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

又 $f'(x)=2x+\frac{a}{x}$,

由导数的几何意义可得, 切点为 $P(x_1, f(x_1))$ 时, 切线斜率为 $2x_1+\frac{a}{x_1}$,

同理可得, 在点 $Q(x_2, f(x_2))$ 处的切线斜率为 $2x_2+\frac{a}{x_2}$.

又因为两条切线与直线 $y=2x$ 平行, 可

得 $\begin{cases} 2x_1+\frac{a}{x_1}=2, \\ 2x_2+\frac{a}{x_2}=2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1^2-2x_1+a=0, \\ 2x_2^2-2x_2+a=0, \end{cases}$

所以 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $2x^2-2x+a=0$ 的两个不相等的实数根,

所以 $\Delta=(-2)^2-4 \times 2a>0$, 即 $a<\frac{1}{2}$, 又

$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1x_2=\frac{a}{2}>0, \end{cases}$ 可得 $0<a<\frac{1}{2}$,

避坑: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因此 x_1, x_2 的值必大于 0, 故 $x_1x_2>0$ 所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1-a$. 由

$0<a<\frac{1}{2}$, 可得 $\frac{1}{2}<1-a<1$, 所以 $x_1^2+x_2^2$

的取值范围是 $(\frac{1}{2}, 1)$. 故选 D.

6. $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ 【解析】 $\because y=(x+1+a)e^x$, $\therefore y'=(x+2+a)e^x$, 设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为 $y-(x_0+1+a)e^{x_0}=(x_0+2+a)e^{x_0}(x-x_0)$,

$\therefore$ 切线过原点, $\therefore -(x_0+1+a)e^{x_0}=(x_0+2+a)e^{x_0}(-x_0)$, 整理得 $x_0^2+(a+1)x_0-a-1=0$.

$\therefore$ 切线有两条, $\therefore \Delta=(a+1)^2+4(a+1)>0$, $\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$.

7. $\pm \frac{\sqrt{7}}{6}$ 【解析】因为 $f(x)=2x^3-3ax^2$, 所以 $f'(x)=6x^2-6ax$, 所以 $f'(-1)=6+6a$.

又 $f(-1)=-2-3a$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程为 $y+2+3a=(6+6a) \cdot (x+1)$, 即切线方程为 $y=(6a+6)x+(4+3a)$.

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线,

所以 $x^2+7x+6=(6a+6)x+(4+3a)$ 有唯一解, 即 $x^2+(1-6a)x+(2-3a)=0$ 有唯一解,

所以 $\Delta=(1-6a)^2-4(2-3a)=0$, 解得 $a=\pm \frac{\sqrt{7}}{6}$, 所以 a 的值为 $\pm \frac{\sqrt{7}}{6}$.

名师点拨 借助导数研究直线与函数图象相切是一般性思路, 但对于某些特定函数或曲线, 也有其他的思路, 比如本题函数 $g(x)$ 是二次函数, 直线与二次函数的图象相切还可以通过联立方程, 利用判别式法研究.

8. 2

思路导引 将 $y=(x-a)^2+(x \ln x-a+3)^2$ 的最小值问题转化为点 $P(x, x \ln x)$ 与点 $Q(a, a-3)$ 距离的最小值的平方问题, 进一步转化为直线 $l: y=x-3$ 与函数 $f(x)=x \ln x$ 图象上的点之间距离的最小值的平方问题, 利用导数求出曲线 $f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线 l_1 与直线 l 平行时, 对应的点 M 坐标, 从而求出最小值.

【解析】 设点 $P(x, x \ln x)$ 是函数 $f(x)=x \ln x$ 图象上的点, 点 $Q(a, a-3)$ 是直线 $l: y=x-3$ 上的点, 则 $PQ=\sqrt{(x-a)^2+(x \ln x-a+3)^2}$, 所以 $y=PQ^2$.

因为 $f'(x)=\ln x+1$, 设曲线 $f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线 l_1 与直线 l 平行, 则 $f'(x_0)=\ln x_0+1=1$, 解得 $x_0=1$,

则点 $M(1, 0)$, 所以 PQ 的最小值为点 $M(1, 0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|1-0-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

所以 $y=(x-a)^2+(x \ln x-a+3)^2$ 的最小值为 2.

9. 【解】(1) 由 $g(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 得 $g'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, 则 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$,

因此所求的切线方程为 $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 即 $4x - 2y + 2 - \pi = 0$.

(2) 由 $f(x) = \ln x$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 设切线的切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 则 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$,

切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$. 又点 $(0, 1)$ 在切线上, 则 $1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0)$, 得 $x_0 = e^2$.

所以 l 的方程为 $y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$, 即 $e^{-2}x - y + 1 = 0$.

刷易错

★易错点 混淆“过某点”和“在某点处”切线方程的求法致误

10. 【解】(1) 由题意得 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, f'(2) = 5$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程为 $y - 2 = 5(x - 2)$, 整理得 $5x - y - 8 = 0$.

(2) 设切点为 (x_0, y_0) . 因为切点在曲线 $y = f(x)$ 上, 所以 $y_0 = x_0^3 - 2x_0^2 + x_0, f'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - (x_0^3 - 2x_0^2 + x_0) = (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(x - x_0)$. 因为切线过原点, 所以 $0 - (x_0^3 - 2x_0^2 + x_0) = (3x_0^2 - 4x_0 + 1) \cdot (0 - x_0)$, 解得 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 1$.

当 $x_0 = 0$ 时, 切点为 $(0, 0), f'(0) = 1$, 切线方程为 $y = x$; 当 $x_0 = 1$ 时, 切点为 $(1, 0), f'(1) = 0$, 切线方程为 $y = 0$. 所以切线方程为 $y = x$ 或 $y = 0$.

易错警示 求“过某点”的切线方程时, 先设出切点的坐标, 然后利用导数求得切线的斜率, 写出切线方程, 利用已知点在切线上, 代入切线方程求解; 求“在某点处”的切线方程时, 将已知点的横坐标代入导数公式中即可得切线的斜率, 利用点斜式求得切线方程.

课时2 简单复合函数的求导法则

刷基础

1. B 【解析】对于 A, $\left(\cos \frac{1}{x}\right)' = \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$, 故 A 错误;

对于 B, $(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot (2x) = 2x \cos x^2$, 故 B 正确;

对于 C, $(\cos 5x)' = (-\sin 5x) \times 5 = -5 \sin 5x$, 故 C 错误;

对于 D, $\left(\frac{1}{2}x \sin 2x\right)' = \frac{1}{2} \times \sin 2x + \frac{1}{2} \times 2x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 2x + 2x \cos 2x)$, 故 D 错误. 故选 B.

规律方法 复合函数的求导法则

对于由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的函数 $y = f(g(x))$, 它的导数与函数 $y = f(u), u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

对于复合函数的求导, 先确定复合关系, 由外向内逐层求导, 必要时可换元.

2. $-e^{-1}$ 【解析】 $\because f(x) = \ln(1-x), \therefore$ 由复合函数的求导法则可知, $f'(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}, \therefore f'(1-e) = \frac{1}{1-e-1} = -\frac{1}{e}$.

3. 【解】(1) $y' = -e^{-x}(x+1)^2 + e^{-x} \cdot 2(x+1) = e^{-x}(1-x^2)$.

(2) $y' = -3\sin(3x-1) - \frac{-2}{-2x+1} = -3\sin(3x-1) - \frac{2}{2x-1}$.

(3) $y' = 2\cos 2x + 2\cos x(-\sin x) = 2\cos 2x - \sin 2x$.

(4) $y' = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}x - \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2} = \frac{x - (2x-1)}{x^2\sqrt{2x-1}} = \frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$.

4. A 【解析】由 $f(x) = e^{\sin x} - 3f'(0)x$ 求导可得 $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x - 3f'(0)$, 则 $f'(0) = e^0 \cdot \cos 0 - 3f'(0) = 1 - 3f'(0)$, 解得 $f'(0) = \frac{1}{4}$, 所以 $f(x) = e^{\sin x} - \frac{3}{4}x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\sin \frac{\pi}{3}} - \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{3} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

5. B

思路导引 由导数的几何意义分别求出 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时过原点的切线方程, 令 $y = 1$, 求出两条切线与直线 $y = 1$ 的交点, 进而通过三角形面积公式求得两条切线与直线 $y = 1$ 围成的三角形面积.

【解析】令 $f(x) = \ln |x|$, 则有 $f(x) =$

$$\begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0, \end{cases} \text{ 则 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x_0 > 0$ 时, 设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$,

所以切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

因为切线过原点 $(0, 0)$, 则有 $0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0)$, 解得 $x_0 = e$,

所以切线方程为 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, 即

$$y = \frac{1}{e}x.$$

当 $x_0 < 0$ 时, 设切点为 $(x_0, \ln(-x_0))$, $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$,

所以切线方程为 $y - \ln(-x_0) = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

因为切线过原点 $(0, 0)$, 则有 $0 - \ln(-x_0) = \frac{1}{x_0}(0 - x_0)$, 解得 $x_0 = -e$,

所以切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{e}(x + e)$, 即

$$y = -\frac{1}{e}x.$$

将 $y = 1$ 代入 $y = \frac{1}{e}x$, 可知交点为 $A(e, 1)$,

将 $y = 1$ 代入 $y = -\frac{1}{e}x$, 可知交点为 $B(-e, 1)$, 则有 $AB = 2e$.

又两切线的交点为 $O(0, 0)$, 易得点 O 到直线 AB 的距离 $d = 1$, 则 $S = \frac{1}{2}AB \cdot$

$$d = \frac{1}{2} \times 2e \times 1 = e,$$

即两条切线与直线 $y = 1$ 围成的三角形面积为 e . 故选 B.

6. D 【解析】 $\sigma(\ln 2) = \frac{1}{1 + e^{-\ln 2}} =$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\ln 2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

$\because e^{-x} > 0$ 恒成立, 故 $1 + e^{-x} > 1$, 则 $0 < \frac{1}{1 + e^{-x}} < 1$, 故 B 正确;

$$\sigma'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \sigma(x)[1 - \sigma(x)] =$$

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot$$

$$\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2},$$

$\therefore \sigma'(x) = \sigma(x)[1 - \sigma(x)]$, 故 C 正确;

$$\sigma(2) = \frac{1}{1 + e^{-2}} = \frac{e^2}{1 + e^2},$$

$$\text{又 } \frac{e^2}{1 + e^2} - \frac{7}{8} = \frac{e^2 - 7}{8(1 + e^2)},$$

$$\because e^2 \approx 7.389 > 7, \therefore \frac{e^2 - 7}{8(1 + e^2)} > 0,$$

$$\therefore \sigma(2) > \frac{7}{8}, \text{ 故 D 错误. 故选 D.}$$

7. $x^x(\ln x + 1)$ 【解析】因为 $y = x^x$, 故可得 $\ln y = x \ln x$, 所以 $(\ln y)' = (x \ln x)'$, 即 $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$, 所以 $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

8. $y = 2x + 6$ 或 $y = 2x - 4$ 【解析】 $\because f'(x) = (e^{2x})' \cdot \cos 3x + e^{2x} \cdot (\cos 3x)' = 2e^{2x} \cdot \cos 3x - 3e^{2x} \cdot \sin 3x, \therefore f'(0) = 2$.

$\therefore$ 曲线 $f(x) = e^{2x} \cdot \cos 3x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $y = 2x + 1$.

由题意知直线 l 与切线 $y = 2x + 1$ 平行, 故设满足题意的直线 l 的方程为 $y =$

$2x+b(b \neq 1)$. 根据题意, 得 $\sqrt{5} = \frac{|b-1|}{\sqrt{5}}$,

悟: 到切线 $y=2x+1$ 的距离为定值 (不为 0) 的直线 l 必有两条

解得 $b=6$ 或 $b=-4$.

$\therefore$ 满足题意的直线 l 的方程为 $y=2x+6$ 或 $y=2x-4$.

刷 易错

★易错点 求复合函数的导数时忽视中间变量致误

9. A 【解析】 $\because y = \log_a(2x^2-1), a > 0$ 且 $a \neq 1, \therefore y' = \frac{(2x^2-1)'}{(2x^2-1) \ln a} = \frac{4x}{(2x^2-1) \ln a}$, 故选 A.

易错警示 设 $t = 2x^2 - 1$, 则函数 $y = \log_a(2x^2-1) = \log_a t$ 是复合函数, 其导数为 $y' = \frac{t'}{t \ln a}$. 注意将 $t = 2x^2 - 1$ 代入分母并求导的结果代入分子.

第 6.1 节综合训练

刷 能力

1. C 【解析】 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$, 则 $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)'e^x + (x^2 - 3x + 1) \cdot (e^x)' = (x^2 - 3x + 2)e^x$, 故 A 错误;

$f(x) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 则 $f'(x) = 0$, 故 B 错误;

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$, 则 $f'(x) = \frac{(\cos x)'(\sin x - \cos x) - \cos x(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin x \cdot (\sin x - \cos x) - \cos x \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$, 故 C 正确;

$f(x) = 2^x + \log_3(3x+1)$, 则 $f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{3}{(3x+1) \ln 3}$, 故 D 错误. 故选 C.

2. D 【解析】设点 P 的横坐标为 x_0 , 对 $y = x^2 - 4x$ 求导得 $y' = 2x - 4$, 则 $\tan 0 \leq 2x_0 - 4 \leq \tan \frac{\pi}{4}$, 即 $0 \leq 2x_0 - 4 \leq 1$, 解得 $2 \leq x_0 \leq \frac{5}{2}$, 即点 P 的横坐标的取值范围为 $\left[2, \frac{5}{2}\right]$. 故选 D.

3. A 【解析】 $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} - 1 = \frac{\cos x}{-x} - 1 = -\frac{\cos x}{x} - 1$, $f(-x) + f(x) = -\frac{\cos x}{x} - 1 + \frac{\cos x}{x} - 1 = -2$, 所以 $f(-2) + f(2) = -2$. $f'(x) = \frac{(-\sin x)x - \cos x}{x^2} =$

$\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于坐标原点对称,

$$f'(-x) = \frac{-(-x) \sin(-x) - \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = f'(x),$$

所以 $f'(x)$ 是偶函数, $f'(3) = f'(-3)$, 所以 $f'(3) - f'(-3) = 0$,

所以 $f'(3) - f'(-3) + f(-2) + f(2) = 0 + (-2) = -2$. 故选 A.

4. A 【解析】因为 $g(x) = 2xg'(1) + x^2$, 所以 $g'(x) = 2g'(1) + 2x$. 因为 $g'(1) = 2g'(1) + 2$, 所以 $g'(1) = -2$, 所以 $g(x) = -4x + x^2$. 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = g(x)$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 由 $x^2 - 4x > 0$, 可得 $x > 4$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) > 0$, 可得 $-4 < x < 0$. 故不等式 $f(x) > 0$ 的解集为

$(-4, 0) \cup (4, +\infty)$. 故选 A.

5. A 【解析】因为 $(a-b)^2 + (c-e^d)^2 = 0$, 所以 $a=b, c=e^d$, 则 $d=\ln c$, $(a-c)^2 + (b-d)^2 = (a-c)^2 + (a-\ln c)^2$. 设 $A(a, a), B(c, \ln c), T = \sqrt{(a-c)^2 + (a-\ln c)^2}$, 则 T 的几何意义是直线 $y=x$ 上的点 $A(a, a)$ 与曲线 $y=f(x) = \ln x$ 上的点 $B(c, \ln c)$ 的距离. 将直线 $y=x$ 平移到与曲线 $y=f(x) = \ln x$ 相切时, 切点 B 到直线 $y=x$ 的距离最小.

而 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 令 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1$, 则 $x_0 = 1$, 可得 $B(1, 0)$, 此时点 B 到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{|1-0|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $AB_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $(T^2)_{\min} = \frac{1}{2}$, 故 $m \leq \frac{1}{2}$. 故选 A.

6. ABD 【解析】由 $f(4x+1) = f(-4x)$, 得 $f(x+1) = f(-x)$, 又函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x), f(0) = 0$, 因此可得 $f(x+1) = -f(x), f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 的周期为 2, 由 $f(4x+1) = f(-4x)$, 令 $x=0$, 得 $f(1) = f(0) = 0$, 所以 $f(2 \ 025) = f(2 \times 1 \ 012 + 1) = f(1) = 0$, 故 A 正确; 由函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 则 $f(x) = -f(-x)$, 两边求导, 得 $f'(x) = -[-f'(-x)] = f'(-x)$, 又 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 则 $g(x) = g(-x)$, 故 B 正确; 由 $f(x+2) = f(x)$ 两边求导, 得 $f'(x+2) = f'(x)$, 即 $g(x+2) = g(x)$,

由 $f(x+1) = f(-x)$, 得直线 $x = \frac{1}{2}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 即 $f\left(\frac{1}{2} + t\right) = f\left(\frac{1}{2} - t\right)$,

两边求导得 $f'\left(\frac{1}{2} + t\right) = -f'\left(\frac{1}{2} - t\right)$.

令 $t=0$, 得 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -f'\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 即 $g\left(\frac{9}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. 故

D 正确;

而 $g(2 \ 025) = g(1 \ 012 \times 2 + 1) = g(1)$, 由 $g(x+2) = g(x), g(x) = g(-x)$, 得 $g(x+2) = g(-x)$, 则直线 $x=1$ 为 $y=g(x)$ 图象的对称轴, 但 $g(1)$ 的值不一定为 0, 故 C 不正确. 故选 ABD.

D 正确;

而 $g(2 \ 025) = g(1 \ 012 \times 2 + 1) = g(1)$, 由 $g(x+2) = g(x), g(x) = g(-x)$, 得 $g(x+2) = g(-x)$, 则直线 $x=1$ 为 $y=g(x)$ 图象的对称轴, 但 $g(1)$ 的值不一定为 0, 故 C 不正确. 故选 ABD.

二级结论 定义域为 $\mathbf{R}$ 的具有奇偶性的函数与导函数奇偶性的关系:

- ① $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数;
- ② $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 是奇函数.

7. AC 【解析】由 $f(x) = x^2 - x - 6$ 得 $f'(x) = 2x - 1$,

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线方程为 $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$,

令 $y=0$, 得 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 6}{2x_n - 1}$, 故 A 正确.

$\frac{x_n^2 - x_n - 6}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 6}{2x_n - 1}$, 故 A 正确.

$\frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 3} = \frac{\frac{x_n^2 + 6}{2x_n - 1} + 2}{\frac{x_n^2 + 6}{2x_n - 1} - 3} = \left(\frac{x_n + 2}{x_n - 3}\right)^2$,

故 $\ln \frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 3} = 2 \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 3}$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 且为递增数列, 故 B 错误, C 正确. 所以 $S_{2 \ 024} = \frac{1 \times (1 - 2^{2 \ 024})}{1 - 2} = 2^{2 \ 024} - 1$, 故 D 错误. 故选 AC.

8. 0 或 $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $y = x + \ln x$, 得 $y' =$

$1 + \frac{1}{x}$, 当 $x=1$ 时, 切线的斜率 $k=2$,

所以曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 1$.

因为切线 $y = 2x - 1$ 与曲线 $y = ax^2 + x - a$ 只有一个公共点, 所以方程 $2x - 1 = ax^2 + x - a$ 只有一个解, 即 $ax^2 - x + 1 - a = 0$ 有唯一解. 当 $a=0$ 时, $y = ax^2 + x - a$ 为 $y = x$, 此时其图象与切线 $y = 2x - 1$ 只有一个交点, 符合题意, 当 $a \neq 0$ 时有 $\Delta = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$. 故 a 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$.

6.2 利用导数研究函数的性质

6.2.1 导数与函数的单调性

刷基础

1. B 【解析】函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 的导函数为

$$y' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

令 $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$, 可得 $x > 1$, 所以函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$.

故选 B.

2. A 【解析】若 $f'(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 充分性成立;

若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增且可导, 则在 (a, b) 上 $f'(x) \geq 0$ (等号在某些点处取得), 不能得到 $f'(x) > 0$.

例如 $f(x) = x^3$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 但 $f'(0) = 0$, 故必要性不成立.

因此“ $f'(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立”是“ $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增”的充分不必要条件. 故选 A.

3. B 【解析】由函数 $y = x^3 f'(x)$ 的图象, 可得当 $x < 0$ 时, $x^3 f'(x) > 0$, 所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $x^3 f'(x) \geq 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x)$ 不恒等于 0), $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 2$ 时, $x^3 f'(x) < 0$, 所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, 2]$. 故选 B.

链接教材 本题是教材第 95 页练习 A 第 1 题的延伸, 考查导函数图象与原函数图象的关系, 解决函数问题时经常会利用导函数判断原函数的单调性. 对导函数图象, 应注意分析其在区间内的正负; 对原函数图象, 应注意分析其在区间内的单调趋势. 导数值在哪个区间内大于 0, 则原函数在对应区间内单调递增; 导数值在哪个区间内小于 0, 则原函数在对应区间内单调递减.

4. C 【解析】对于 A, 若在 x 轴上方的曲线为 $f(x)$ 的图象, 则该函数单调递减, 则 $f'(x) < 0$ 恒成立, $f'(x)$ 的图象在 x 轴下方, 符合题意, A 正确.

对于 B, 若与 x 轴有 3 个交点的曲线为 $f(x)$ 的图象, 另一条曲线为 $f'(x)$ 的图象, 则 $f(x)$ 的单调性与 $f'(x)$ 的正负情况吻合, 符合题意, B 正确.

对于 C, 若平行于 x 轴的直线为 $f(x)$ 的图象, 则另一条直线为 $f'(x)$ 的图象, 此时 $f(x)$ 无单调性与 $f'(x)$ 存在零点矛盾, 不符合题意;

若平行于 x 轴的直线为 $f'(x)$ 的图象, 此时 $f'(x)$ 是大于 0 的常数, 则 $f(x)$ 是单调递增的一条直线, 矛盾, 不符合题意, C 错误.

对于 D, 若与 x 轴相交的曲线为 $f(x)$

的图象, 则该函数单调递增, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, $f'(x)$ 的图象在 x 轴上方, 符合题意, D 正确. 故选 C.

5. 【解】(1) 由 $f(x) = ax + \frac{2}{x} - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$), 可得 $f'(x) = a - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$,

因为 $f'(1) = -2$, 所以 $a - \frac{2}{1^2} - \frac{1}{1} = -2$,

解得 $a = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}.$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $x^2 - x - 2 > 0$, 所以 $(x-2)(x+1) > 0$,

又 $x \in (0, +\infty)$, 解得 $x > 2$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

令 $f'(x) < 0$, 得 $x^2 - x - 2 < 0$, 所以 $(x-2)(x+1) < 0$,

又 $x \in (0, +\infty)$, 解得 $0 < x < 2$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

6. B 【解析】因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以 $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3 \leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

则 $\Delta = 4a^2 - 36 \leq 0$,

解得 $-3 \leq a \leq 3$. 故选 B.

7. C 【解析】由 $f(x) = ae^x - x$ 求导可得 $f'(x) = ae^x - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 无单调递增区间, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 则有 $f'(0) = ae^0 - 1 = a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = e^x - 1$,

则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x = 0$ 时, $f'(x) = 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 符合题意. 所以 $a = 1$. 故选 C.

特别注意 函数的单调递增区间为 $[0, +\infty)$ 与函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增含义不同, 前者指的是函数完整的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 后者指的是 $[0, +\infty)$ 包含于函数的完整的单调递增区间.

8. A 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9\ln x$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 又函数 $f(x)$ 在区间 $[a-1, a+1]$ 上单调递减,

由 $f'(x) = x - \frac{9}{x} \leq 0$, 得 $0 < x \leq 3$,

所以 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ a+1 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围是 $(1, 2]$. 故选 A.

点悟: $[a-1, a+1] \subseteq (0, 3]$

规律方法 由函数在区间 D 上的单调性求参数取值范围的方法

(1) 若函数 $f(x)$ 单调递增, 则在区间 D 上 $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(2) 若函数 $f(x)$ 单调递减, 则在区间 D 上 $f'(x) \leq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(3) 若函数 $f(x)$ 为常函数, 则 $f'(x) = 0$ 恒成立.

具体解题时, 先由导函数在区间 D 上恒非负 (单调递增) 或恒非正 (单调递减) 求出参数的取值范围, 再验证此范围内是否存在参数值使得导数值在区间 D 的某个子区间上恒为 0, 若存在, 需要剔除, 若不存在, 不需要在解答中体现验证过程.

9. D 【解析】由题意得, $f'(x) = \ln x + \frac{x-a}{x} = \ln x - \frac{a}{x} + 1$, 令 $g(x) = f'(x)$,

$$\frac{x-a}{x} = \ln x - \frac{a}{x} + 1, \text{ 令 } g(x) = f'(x),$$

则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 且 $f'(1) = 1-a$, $f'(e) = 2 - \frac{a}{e}$.

又因为 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上不单调, 所以 $\begin{cases} f'(1) = 1-a < 0, \\ f'(e) = 2 - \frac{a}{e} > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < a < 2e$. 故选 D.

10. 【解】(1) 由 $a = 1$, 知 $f(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + x$, $f'(x) = 1 - e^{2x}$, 所以所求切线的斜率 $k = f'(1) = 1 - e^2$, 又 $f(1) = 1 - \frac{e^2}{2}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) = (1 - e^2)(x - 1)$, 即 $y = (1 - e^2)x + \frac{1}{2}e^2$.

(2) 由 $f(x) = ax + (1-a)e^x - \frac{e^{2x}}{2}$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = a + (1-a)e^x - e^{2x} = (e^x + a)(1 - e^x)$.

敲黑板: 求导研究函数单调性的关键在于判断导函数的正负, 而因式分解是常见的判断正负的方法, 所以求导后要有意识地对导函数进行因式分解. 本题 e^{2x} 与 e^x 是平方关系, 所以导函数是关于 e^x 的二次式, 可以通过十字相乘进行因式分解.

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \ln(-a)$.

(i) 当 $a < -1$ 时, $-a > 1$, $\ln(-a) > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \ln(-a)$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \ln(-a)$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \ln(-a))$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\ln(-a), +\infty)$;

(ii) 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = (e^x - 1)(1 - e^x) = -(e^x - 1)^2 \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

(iii) 当 $-1 < a < 0$, 即 $0 < -a < 1$ 时, $\ln(-a) < 0$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $\ln(-a) < x < 0$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln(-a)$ 或 $x > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a), 0)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln(-a))$, $(0, +\infty)$.

当 $a \geq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

综上所述, 当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \ln(-a))$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\ln(-a), +\infty)$;

当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $\mathbf{R}$, 无单调递增区间;

当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a), 0)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln(-a))$, $(0, +\infty)$;

当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

名师点拨 求 $y=f(x)$ 的单调区间, 若导函数 $y=f'(x)$ 中含参数, 实质上就是解含参数的不等式 $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

11. B 【解析】 $a = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\ln 3}{3}$,

令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x \geq e$ 时, $\varphi'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, 函数 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

又 $e < 3 < 4$, 所以 $\varphi(e) > \varphi(3) > \varphi(4)$, 所以 $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 4}{4}$, 所以 $a < c < b$.

故选 B.

12. D 【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 求得 $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, 所以函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $\frac{f(1)}{e} > \frac{f(-1)}{e^{-1}}$, 即 $f(1) > e^2 f(-1)$, 因此 D 选项一定成立. 故选 D.

规律方法 在利用导函数与原函数的关系构造函数时, 若已知条件中 $f'(x)$ 的系数为 1, 根据 $f(x)$ 的系数不同, 构造不同的函数, 具体见下表:

$f'(x) + f(x) > 0$	$g(x) = e^x f(x)$
$f'(x) - f(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$
$f'(x) + kf(x) > 0$	$g(x) = e^{kx} f(x)$
$f'(x) - kf(x) > 0$	$g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$
$f'(x) + \ln af(x) > 0$	$g(x) = a^x f(x)$
$f'(x) + f(x) > a$	$g(x) = e^x [f(x) - a]$
$f'(x) - f(x) > a$	$g(x) = \frac{f(x) + a}{e^x}$

为方便记忆, 需要注意: ①若已知条件用加号, 则构造的函数是乘式; 若已知条件用减号, 则构造的函数是商式. ② e 的指数与 $f(x)$ 的系数有关. ③需要注意已知条件右侧是否为 0.

13. C 【解析】 $\forall x > 0$, 都有 $xf'(x) < 2$, 即 $f'(x) - \frac{2}{x} < 0$,

构造函数 $g(x) = f(x) - 2\ln x$, 其中 $x > 0$, 则 $g'(x) = f'(x) - \frac{2}{x} < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

由 $\frac{1}{x} f(e^x) < 2$ 可得 $f(e^x) - 2x =$

$f(e^x) - 2\ln e^x < 0$,

又因为 $f(e) = 2$, 所以 $g(e) = f(e) - 2\ln e = f(e) - 2 = 0$.

由 $f(e^x) - 2\ln e^x < 0$ 可得 $g(e^x) < g(e)$, 所以 $e^x > e$, 解得 $x > 1$,

故原不等式的解集为 $(1, +\infty)$. 故选 C.

14. BC 【解析】令 $f(x) = e^x + \ln x$ ($0 < x < 1$), 所以 $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $e^{x_1} + \ln x_1 < e^{x_2} + \ln x_2$,

可得 $e^{x_1} - e^{x_2} < \ln x_2 - \ln x_1$, 故 A 错误, C 正确;

令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$ ($0 < x < 1$), 所以

$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

因为 $0 < x < 1$, 所以 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$,

所以 $\frac{e^{x_1}}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2}$, 即 $x_2 \cdot e^{x_1} > x_1 \cdot e^{x_2}$, 故 B 正确, D 错误. 故选 BC.

15. (2 024, 2 025) 【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 其中 $x > 0$, 则 $g'(x) =$

$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$, 所以函数 $g(x) =$

$\frac{f(x)}{x}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数.

由 $f(m-2 024) > (m-2 024)f(1)$ 可得 $\frac{f(m-2 024)}{m-2 024} > \frac{f(1)}{1}$, 即 $g(m-2 024) > g(1)$, 所以 $0 < m-2 024 < 1$, 解得 $2 024 <$

$m < 2 025$. 因此, 实数 m 的取值范围是 $(2 024, 2 025)$.

避坑: 用函数单调性解函数不等式时要注意函数的定义域, 本题不要遗漏自变量 $x > 0$ 这个条件.

刷易错

★易错点 1 混淆原函数图象与导函数图象致错

16. A 【解析】 $\therefore$ 所给图象是导函数 $f'(x)$ 的图象, 且点 A 处导数值小于

0, 点 B 处导数值大于 0, $\therefore$ 原函数图象在 A, B 的对应点附近, A 处下降, B 处上升. 故选 A.

易错警示 在处理与函数图象有关的问题时, 要注意所研究的图象是原函数的图象还是导函数的图象. 对于原函数, 要注意其图象在哪个区间内上升、在哪个区间内下降; 而对于导函数, 则应注意其函数值在哪个区间内大于零、在哪个区间内小于零, 并分析这些区间与原函数的单调区间的关系.

★易错点 2 利用导数研究函数单调性时对条件理解不全面致误

17. $(-\infty, -16] \cup [2, +\infty)$ 【解析】 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上单调等价于 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a \leq 0$ 或 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a \geq 0$ 在 $[-1, 4]$ 上恒成立, 且等号不恒成立, 则在区间 $[-1, 4]$ 上, $a \leq (-2x^2 + 4x)_{\min}$ 或 $a \geq (-2x^2 + 4x)_{\max}$, 即 $a \leq -16$ 或 $a \geq 2$.

易错警示 本题中, 由于函数 $f(x)$ 在 $[-1, 4]$ 上单调, 因此应分函数在该区间上单调递增或单调递减两种情况讨论. 另外, 求解本题应注意函数 $f(x)$ 在某一区间内 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 只是函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增 (或减) 的充分不必要条件, 若函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增 (或减), 则可以得到 $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立 (或 $f'(x) \leq 0$ 且等号不恒成立) 在该区间上恒成立.

★易错点 3 不清楚函数存在单调区间与函数在区间上单调的区别致误

18. (1) $(-\frac{1}{9}, +\infty)$ (2) $[0, +\infty)$

【解析】(1) $f'(x) = -x^2 + x + 2a$, 由于 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在单调递增区间, 故 $\exists x_0 \in (\frac{2}{3}, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) > 0$, $\therefore a > (\frac{x^2 - x}{2})_{\min}$, 由于 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore$ 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, $(\frac{x^2 - x}{2})_{\min} = -\frac{1}{9}$, $\therefore a > -\frac{1}{9}$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上单调递增, 则 $\forall x \in (\frac{2}{3}, 1)$, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore a \geq (\frac{x^2 - x}{2})_{\max}$, 由于 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上单调递增, $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $(\frac{x^2 - x}{2})_{\max} = 0$, $\therefore a \geq 0$.

易错警示 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 D

上存在单调递增 (或减) 区间.

方法一: 转化为 “ $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 在区间 D 上有解”;方法二: 转化为 “存在区间 D 的一个子区间使 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 成立”.(2) 函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增 (或减).方法一: 转化为 “ $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$) 在区间 D 上恒成立 ($f'(x)$ 不恒等于 0)”;方法二: 转化为 “区间 D 是函数 $f(x)$ 的单调递增 (或减) 区间的子区间”.**刷提升****1. B** 【解析】由题中 $f(x)$ 的图象可知, 在整个定义域 $[-1, 1]$ 内, $y=f(x)$ 始终单调递增,所以 $y=f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即导函数图象不在 x 轴下方, 故 **A 错误**.另一方面, x 从 -1 到 0 的变化过程中, 曲线越来越陡, 说明斜率 (导数) 在递增; x 从 0 到 1 的变化过程中, 曲线越来越平缓, 说明斜率 (导数) 在递减.对于 B 选项, 满足以上分析的特征, 故 **B 正确**.对于 C 选项, 导函数在 $x < 0$ 时递减, $x > 0$ 时递增, 与原函数的斜率变化规律相反, 故 **C 错误**.对于 D 选项, 导函数在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 与 $x > 0$ 时斜率递减矛盾, 故 **D 错误**. 故选 **B**.**2. C** 【解析】由题可得 $f'(x) = ax^2 + bx + c$, 根据 $f'(x) > 0$ 的解集为 $(-3, 1)$, 可得 $f'(x) = a(x+3)(x-1)$, $a < 0$, 则有 $b = 2a, c = -3a$, $\therefore b < a < c$, 故选 **C**.**3. D** 【解析】由函数 $f(x) = \frac{x}{x-t}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 故函数 $f(x)$ 在该区间上有意义, 且 $f(x)$ 的图象为双曲线型, 其渐近线为直线 $x=t$, 则 $t \leq 2$, $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-t) - x \cdot 1}{(x-t)^2} = -\frac{t}{(x-t)^2}$,因为函数 $f(x) = \frac{x}{x-t}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(x) = -\frac{t}{(x-t)^2} \leq 0$ 在 $(2, +\infty)$ 上恒成立,所以 $\begin{cases} t \geq 0, \\ t \leq 2, \end{cases}$ 解得 $0 \leq t \leq 2$. 但 $t=0$ 时, $f(x) = 1$ 为常函数, 不满足题设单调递减的要求, 故 $t=0$ 应舍去, 因此, 实数 t 的取值范围为 $(0, 2]$. 故选 **D**.**4. B** 【解析】令 $g(x) = e^x f(x) - e^x$, $x \in \mathbf{R}$,则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] - e^x = e^x [f(x) + f'(x) - 1]$.因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f'(x) > 1$, 即 $f(x) + f'(x) - 1 > 0$, 所以 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x) - 1] > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以 $g(x) = e^x f(x) - e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.因为 $f(0) = 2.026$, 所以 $g(0) = e^0 f(0) - e^0 = 2.026 - 1 = 2.025$,则 $e^x f(x) > e^x + 2.025 \Leftrightarrow e^3 f(x) - e^3 > 2.025$, 即 $g(x) > g(0)$,所以 $g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$, 即不等式 $e^x f(x) > e^x + 2.025$ 的解集为 $(0, +\infty)$.故选 **B**.**5. D** 【解析】 $a = 1.5^{1.1} > 1, b = 1.1^{1.5} > 1$, $c = \log_{1.5} 1.1 < \log_{1.5} 1.5 = 1$,其中 $\ln a = 1.1 \ln 1.5, \ln b = 1.5 \ln 1.1$, $\frac{\ln a}{1.1 \times 1.5} = \frac{\ln 1.5}{1.5}, \frac{\ln b}{1.1 \times 1.5} = \frac{\ln 1.1}{1.1}$.设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,令 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$, 得 $0 < x < e$,故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,所以 $\frac{\ln 1.5}{1.5} > \frac{\ln 1.1}{1.1}$, 即 $\frac{\ln a}{1.1 \times 1.5} >$ $\frac{\ln b}{1.1 \times 1.5}$, 即 $a > b$, 所以 $c < b < a$. 故选 **D**.**6. ACD** 【解析】不妨设 $1 \leq x_1 < x_2 \leq e$, 则 $x_2 - x_1 > 0$,由 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < a$, 得 $x_1 \ln x_2 -$ $x_2 \ln x_1 < a(x_2 - x_1)$, 即 $x_1(\ln x_2 + a) <$ $x_2(\ln x_1 + a)$, 则 $\frac{\ln x_2 + a}{x_2} < \frac{\ln x_1 + a}{x_1}$. 令 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$,**悟**: 化同构, 再构造新函数求解于是当 $1 \leq x_1 < x_2 \leq e$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$,因此 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减, 求得 $f'(x) = \frac{1 - (\ln x + a)}{x^2} \leq$ 0 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立 ($f'(x)$ 不恒等于 0), 即 $1 - \ln x - a \leq 0$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立, 从而 $a \geq 1 - \ln x$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立.而函数 $y = 1 - \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减, 当 $x=1$ 时, $(1 - \ln x)_{\max} = 1$, 则 $a \geq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$, **B 正确, A, C, D 错误**. 故选 **ACD**.**7. $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$** 【解析】令 $f(x) = \sin x -$ $\cos x + 2x - \frac{\pi}{2}$, 则 $f'(x) = \cos x + \sin x +$ $2 = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2 > 0$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,又 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为 $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$.综上, 原不等式的解集为 $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$.**多种解法** 不等式 $\sin x - \cos x + 2x -$ $\frac{\pi}{2} > 0$ 可化为 $\sin x + x > \sin(\frac{\pi}{2} - x) +$ $\frac{\pi}{2} - x$, 构造函数 $f(x) = \sin x + x$, 则 $f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$ 且不恒为 0 , 所以 $f(x) = \sin x + x$ 为增函数, 从而原不等式可化为 $x > \frac{\pi}{2} - x$, 解得 $x > \frac{\pi}{4}$, 因此原不等式的解集为 $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$.**8. 【解】** (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + 2b =$ $\frac{2bx^2 + x - a}{x^2}$. $\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 = 0$, $\therefore \begin{cases} f'(1) = 2, \\ f(1) = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 2b + 1 - a = 2, \\ a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$.(2) 当 $2b = a + 1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + (a+1)x$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + a + 1 = \frac{(a+1)x^2 + x - a}{x^2} =$ $\frac{[(a+1)x - a](x+1)}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.① 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = \frac{x+1}{x^2} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.② 当 $a \neq -1$ 时, $f'(x) =$ $(a+1) \left(x - \frac{a}{a+1} \right) (x+1) \frac{1}{x^2}$. 令 $f'(x) = 0$,解得 $x_1 = \frac{a}{a+1}, x_2 = -1$ (舍去).若 $a > 0$, 则 $a+1 > 0, \frac{a}{a+1} > 0$, 又 $\because x \in$ $(0, +\infty), \therefore x+1 > 0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{a}{a+1})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in$ $(\frac{a}{a+1}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{a+1})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{a+1}, +\infty)$ 上单调递增.若 $-1 < a \leq 0$, 则 $a+1 > 0, \frac{a}{a+1} \leq 0$,又 $\because x \in (0, +\infty), \therefore x - \frac{a}{a+1} > 0, x+1 >$ $0, \therefore f'(x) > 0$, $\therefore$ 当 $-1 < a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递增.

若 $a < -1$, 则 $a+1 < 0, \frac{a}{a+1} > 0$,又 $\because x \in (0, +\infty), \therefore$ 当 $x \in$ $(0, \frac{a}{a+1})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in$ $(\frac{a}{a+1}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{a+1})$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{a+1}, +\infty)$ 上单调递减.综上所述, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$

上单调递增;

当 $-1 \leq a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递减.

刷素养

9.1 【解析】设曲线 $y = e^x + 4x$ 上的切点为 $(x_1, e^{x_1} + 4x_1)$, 曲线 $y = 2 + \ln x$ 上的切点为 $(x_2, 2 + \ln x_2)$.

因为 $(e^x + 4x)' = e^x + 4$, $(2 + \ln x)' = \frac{1}{x}$,

所以曲线 $y = e^x + 4x$ 在点 $(x_1, e^{x_1} + 4x_1)$ 处的切线方程为 $y = (e^{x_1} + 4)(x - x_1) + e^{x_1} + 4x_1 = (e^{x_1} + 4)x + (1 - x_1)e^{x_1}$, 曲线 $y = 2 + \ln x$ 在点 $(x_2, 2 + \ln x_2)$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{x_2}(x - x_2) + 2 + \ln x_2 = \frac{1}{x_2}x + \ln x_2 + 1$, 所以

$$\begin{cases} e^{x_1} + 4 = \frac{1}{x_2}, \\ (1 - x_1)e^{x_1} = \ln x_2 + 1, \end{cases}$$

消去 x_2 , 得 $(1 - x_1)e^{x_1} = -\ln(e^{x_1} + 4) + 1$,

令 $t = e^{x_1}$, $t > 0$, 则 $x_1 = \ln t$,

所以 $(1 - \ln t)t = -\ln(t + 4) + 1$.

设 $f(t) = (1 - \ln t)t + \ln(t + 4) - 1$, $t > 0$,

则 $f'(t) = \frac{1}{t} \cdot t + 1 - \ln t + \frac{1}{t+4} = \frac{1}{t+4} - \ln t$,

易知 $f'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $f'(t) > 0$, 且 $f'(e) = \frac{1}{e+4} - 1 < 0$,

所以 $\exists t_0 \in (0, e)$, 使得 $f'(t_0) = 0$,

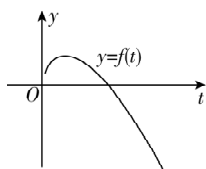
则 $f(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上单调递增, 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递减.

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $f(t) > 0$, 所以 $f(t_0) > 0$,

又当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow -\infty$,

所以 $f(t)$ 有唯一零点, 即方程 $(1 - \ln t)t = -\ln(t + 4) + 1$ 有唯一解.

故曲线 $y = e^x + 4x$ 和 $y = 2 + \ln x$ 的公切线的条数为 1.



10.1 【解析】令 $f(x) = 24x^5 - 15x^4 + 40x^3 - 30x^2 + 120x + 1$, 则 $f'(x) = 60 \cdot (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2) = 60 \cdot \left[\frac{7}{4}x^4 + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right] > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $f(1) = 140$, $f(-1) = -228$, 所以

$f(1) \cdot f(-1) < 0$, 所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点, 即所求方程有且仅有一个

悟: 根据函数零点存在定理的加强定理判断零点的个数

实数根.

6.2.2 导数与函数的极值、最值

课时1 函数的导数与极值

刷基础

1.B 【解析】根据 $f'(x)$ 的图象可知, 在 $(-2, 3)$ 上 $f'(x) \leq 0$ 且仅在 $x = 1$ 处有 $f'(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-2, 3)$ 上单调递减, 故①错误;

由 $f'(-2) = 0$ 可知, $f(x)$ 的图象在 $x = -2$ 处的切线斜率等于 0, 故②正确;

$f(x)$ 在区间 $(-2, 3)$ 上单调递减, 没有极值点, 故③错误;

由 $f'(x)$ 的图象可知, $f'(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小值, 故④正确. 故选 B.

2.BD 【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 则 $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, 所以 $f'(x)$ 有两个变号零点, 所以 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 , x_2 , 且 $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0$. 故选 BD.

3.B 【解析】因为 $f(x) = -\frac{x}{e^x}$, 所以

$$f'(x) = \frac{x-1}{e^x}.$$

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减,

在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

可知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得唯一的极值, 所以 $f(x)$ 的极值点为 1. 故选 B.

4.C 【解析】由 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \ln x$, $x > 0$,

$$\text{得 } f'(x) = 3x - \frac{1}{x} = \frac{3x^2 - 1}{x},$$

由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 由 $f'(x) < 0$ 得

$$0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增,

故函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \ln x$ 的极小值为

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3. \text{ 故选 C.}$$

特别注意 求函数极值的注意事项

(1) 定义域优先, 若使 $f'(x) = 0$ 的点不在定义域内, 需要舍去;

(2) 检查导数值为 0 的点的附近左右两侧的导数值是否异号, 若异号, 则该点是极值点, 否则不是极值点.

5. 【解】(1) 易知 $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$, 则 $f'(1) = 1$, 又 $f(1) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 令

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1) = 0, \text{ 可得 } x = \frac{1}{e},$$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况

如表所示:

x	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,

极小值为 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$, 无极大值.

6.B 【解析】由已知得 $f'(x) = x^2 + 2ax - a$.

函数 $f(x)$ 没有极值, 等价于其导函数 $f'(x)$ 的符号不发生改变.

因为 $y = f'(x)$ 的图象是开口向上的抛物线, 所以 $\Delta = (2a)^2 - 4 \times 1 \times (-a) = 4a^2 + 4a \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 0$,

即当 $-1 \leq a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 满足题意.

故函数 $f(x)$ 没有极值时实数 a 的取值范围为 $[-1, 0]$. 故选 B.

7.D 【解析】 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$. 要

使函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 在 $(0, 2)$

上有极值, 则 $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$

上有变号零点, 即 $a = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上有

变号实数根. 令 $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, 2)$,

悟: 参变分离, 转化为参数值和函数值域之间的关系

则 $g(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且

仅当 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $a \geq 2$.

当 $a = 2$ 时, $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ 且等号

不恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调

递增, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上没有极

值, 故 $a > 2$. 故选 D.

8.B 【解析】由题意得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$

$$\frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3},$$

又函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值,

故方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 有两个不相等的

正实根, 设方程的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } \begin{cases} \Delta = b^2 + 8ac > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0, \end{cases} \text{ 则 } b^2 + 8ac > 0, ab > 0,$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = -\frac{2c}{a} > 0, \end{cases}$$

$ac < 0$, 故排除 A, C, D.

因为 $ab > 0, ac < 0$, 所以 b, c 异号, 故 $bc < 0$. 故选 B.

9. 【解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=2\ln x+x^2-5x$, $f'(x)=\frac{2}{x}+2x-5$, 则 $f'(1)=-1$, 又

$$f(1)=-4,$$

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+4=-(x-1)$, 即 $x+y+3=0$.

$$(2) f(x)=2a\ln x+x^2-(a+4)x (x>0),$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)(2x-a)}{x},$$

$$\text{令 } f'(x)=0, \text{ 解得 } x=2 \text{ 或 } x=\frac{a}{2}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 极小值为 $f(2)=2a\ln 2-2a-4$.

当 $a > 0$ 时, 分以下情况:

$$\textcircled{1} 0 < \frac{a}{2} < 2, \text{ 即 } 0 < a < 4 \text{ 时, 当 } x \in$$

$(0, \frac{a}{2})$ 或 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{a}{2}, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, 故 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 处取极大值

$$2a\ln \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} - 2a, \text{ 在 } x=2 \text{ 处取极小值}$$

$$2a\ln 2 - 2a - 4.$$

$$\textcircled{2} \frac{a}{2} = 2, \text{ 即 } a=4 \text{ 时, } f'(x) \geq 0 (f'(x)$$

不恒等于 0), 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 无极大值.

$$\textcircled{3} \frac{a}{2} > 2, \text{ 即 } a > 4 \text{ 时, 当 } x \in (0, 2) \text{ 或}$$

$x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调

递增; 当 $x \in (2, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$

单调递减, 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取极大值

$$2a\ln 2 - 2a - 4, \text{ 在 } x=\frac{a}{2} \text{ 处取极小值}$$

$$2a\ln \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} - 2a.$$

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=2$ 处取极小值 $2a\ln 2 - 2a - 4$, 无极大值;

当 $0 < a < 4$ 时, $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 处取极大

$$\text{值 } 2a\ln \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} - 2a, \text{ 在 } x=2 \text{ 处取极小}$$

$$\text{值 } 2a\ln 2 - 2a - 4;$$

当 $a=4$ 时, $f(x)$ 无极大值;

当 $a > 4$ 时, $f(x)$ 在 $x=2$ 处取极大值

$$2a\ln 2 - 2a - 4, \text{ 在 } x=\frac{a}{2} \text{ 处取极小值}$$

$$2a\ln \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} - 2a.$$

10. D 【解析】因为 $f(x)=x+2\sin x$, 所以 $f'(x)=1+2\cos x$,

$$\text{由 } f'(x) < 0, \text{ 得 } \cos x < -\frac{1}{2}, \text{ 则 } 2k\pi +$$

$$\frac{2\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{4\pi}{3} (k \in \mathbf{N}),$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } \cos x > -\frac{1}{2}, \text{ 则 } 0 < x <$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{4\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{8\pi}{3} (k \in \mathbf{N}),$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(2k\pi + \frac{2\pi}{3},$

$2k\pi + \frac{4\pi}{3}) (k \in \mathbf{N})$ 上单调递减, 在区

间 $(0, \frac{2\pi}{3}), (2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi + \frac{8\pi}{3})$

$(k \in \mathbf{N})$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$

的极小值点为 $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi (k \in \mathbf{N})$.

将函数 $f(x)=x+2\sin x (x>0)$ 的所有极小值点从小到大排列成数列 $\{a_n\}$,

则 $a_1=\frac{4\pi}{3}, a_2=\frac{4\pi}{3}+2\pi, \dots$, 易知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

$$\text{点悟: } a_k=\frac{4\pi}{3}+2(k-1)\pi (k \in \mathbf{N}_+)$$

关于 k 的一次函数

且数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=2\pi$, 则

$$a_9=a_1+8d=\frac{4\pi}{3}+16\pi,$$

$$\sin a_9=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+16\pi\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$-\sin \frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故选 D.}$$

11. 【解】(1) 因为 $f(x)=2x^3-ax^2+b$, 所以 $f'(x)=6x^2-2ax$, 因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -4 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} f'(1)=6-2a=0, \\ f(1)=2-a+b=-4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=3, \\ b=-3, \end{cases}$$

此时 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$,

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 符合题意, 所以 $\begin{cases} a=3, \\ b=-3. \end{cases}$

(2) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

若 $a=0$, 则 $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$.

若 $a < 0$, 则当 $x < \frac{a}{3}$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{a}{3} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

减, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{a}{3})$, $(0, +\infty)$, 单调递减区间

为 $(\frac{a}{3}, 0)$.

若 $a > 0$, 则当 $x < 0$ 或 $x > \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) >$

0 , $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$,

$(\frac{a}{3}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{a}{3})$.

(3) 由 (2) 可知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (\frac{a}{3}, +\infty)$;

单调递减区间为 $(0, \frac{a}{3})$.

当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极大值, 即 $f(0)=b=1$, 所以 $f(x)=2x^3-ax^2+1$,

易知当 $x=\frac{a}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极小

$$\text{值 } f\left(\frac{a}{3}\right)=2 \times \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 +$$

$$1=\frac{2a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + 1 = \frac{a^3}{27} + 1, \text{ 且当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时,}$$

$f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

则当 $\frac{a^3}{27} + 1 > 0$, 即 $0 < a < 3$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点;

当 $\frac{a^3}{27} + 1 = 0$, 即 $a=3$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点;

当 $\frac{a^3}{27} + 1 < 0$, 即 $a > 3$ 时, $f(x)$ 有 3 个零点.

刷易错

★易错点 1 混淆极值点与极值致误

12. D 【解析】由题意, 得 $f'(x)=e^x+a$, 显然当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 无极值点, 不符合题意, 所以 $a < 0$, 所以 $f'(x)=0$ 的根 $x=\ln(-a) > 0$, 所以 $-a > 1$, 即 $a < -1$. 当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-a), +\infty)$ 上单调递增, 有极小值, 故选 D.

易错警示 极值点指的是取极值时 x 的值, 极值是指 $f(x)$ 的值, 所以有大于零的极值点, 即 $f'(x)=0$ 有大于零的变号根.

★易错点 2 对极值取得条件理解不充分致误

13. B 【解析】函数 $f(x)=x(x-a)^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f'(x)=(x-a)^2+2x(x-a)=(x-a)(3x-a),$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 所以 $f'(1)=(1-a)(3-a)=0$, 所以 $a=1$ 或 $a=3$.

若 $a=1$, 则 $f'(x)=(x-1)(3x-1)$,

所以当 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$

单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 不符合题意, 故 $a \neq 1$;

若 $a=3$, 则 $f'(x)=(x-3)(3x-3)=3(x-1)(x-3)$,

所以当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, 3)$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 符合题意.

综上, $a=3$. 故选 B.

易错警示 已知函数的极值点 x_0 求参数的值时,可根据 $f'(x_0)=0$ 建立关于参数的方程(组),通过解方程(组)得到参数的值后还需要进行验证,因为“ $f'(x_0)=0$ ”是“ x_0 为极值点”的必要不充分条件,而不是充要条件,因此在解答此类问题时不要忘了验证,以免产生多解而造成解答错误.

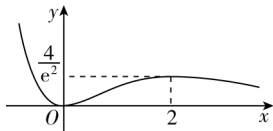
刷提升

1. C 【解析】根据 $y=(x+2) \cdot f'(x)$ 的图象可知,当 $x<-2$ 时, $f'(x)>0$; 当 $-2<x<0$ 时, $f'(x)>0$, 当 $0<x<2$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 因此函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值, 在 $x=0$ 时取得极大值. 故 A, B, D 错误, C 正确. 故选 C.

2. A 【解析】对 $f(x)=ae^x-\frac{1}{3}x^3$ 求得 $f'(x)=ae^x-x^2$, 由 $f(x)$ 有三个极值点 $\Rightarrow f'(x)$ 有三个不同的变号零点, 即方程 $a=\frac{x^2}{e^x}$ 有三个不同实根(实根不在 $y=\frac{x^2}{e^x}$ 的极值点处取得).

$$\text{设 } g(x)=\frac{x^2}{e^x}, g'(x)=\frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x},$$

当 $x<0$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $0<x<2$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x>2$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减, 因此 $g(x)$ 的极大值为 $g(0)=0$, 极大值为 $g(2)=\frac{4}{e^2}$, 且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0^+$, 又 $g(x)$ 恒大于 0, 作出 $g(x)$ 的大致图象如图所示. 要使方程 $a=\frac{x^2}{e^x}$ 有三个不同实根, 则有 $0<a<\frac{4}{e^2}$. 故选 A.



3. BC 【解析】由 $f(x)=x^3+3x^2+bx+1$ 得 $f'(x)=3x^2+6x+b$, 令 $g(x)=3x^2+6x+b$, 则 $g'(x)=6x+6$, 令 $g'(x)=0$, 解得 $x=-1$, 所以 -1 是函数 $g(x)$ 的极小值点. 又 $f'(x)$ 的极值点是函数 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(-1)=-1+3-b+1=0$, 解得 $b=3$. 此时 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

对于 A, $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2 \geq 0$ 且等号不恒成立, 所以函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 $f(x)$ 没有极值点, 故 A 错误;

对于 B, 由 A 知, 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 且 $f(-1)=0$, 即 $f(x)$ 有且只

有一个零点, 故 B 正确;

对于 C, $f(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$, 则 $f(-c-2)=(-c-1)^3=-(c+1)^3=-f(c)$, 因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以由 $a+c>-2$, 即 $a>-c-2$ 可得 $f(a)>f(-c-2)=-f(c)$, 即 $f(a)+f(c)>0$, 故 C 正确;

对于 D, 不妨设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由 $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$, 可得切线斜率为 $3(x_0+1)^2$, 则切线方程为 $y-(x_0+1)^3=3(x_0+1)^2(x-x_0)$, 由切线过原点, 得 $-(x_0+1)^3=3(x_0+1)^2(-x_0)$, 整理得 $(x_0+1)^2(1-2x_0)=0$, 解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=\frac{1}{2}$, 即过坐标原点有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切, 故 D 错误. 故选 BC.

4. AB 【解析】 $f'(x)=a(x-1)^2+2(x-1)(ax-b)=(x-1)(3ax-a-2b)$,

$$\text{由 } f'(x)=0 \text{ 可得 } x=1 \text{ 或 } x=\frac{a+2b}{3a},$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 则 $\frac{a+2b}{3a} \neq 1$, 即 $a \neq b$. 已知 $a \neq 0$,

若 $a>0$, 则 $\frac{a+2b}{3a}>1$, 所以 $b>a>0$, 此时有 $a^2<ab<b^2$, A 成立.

若 $a<0$, 则 $\frac{a+2b}{3a}<1$, 所以 $b>a$, 此时若 $b<0$, 则有 $a^2>ab>b^2$, B 成立. 若 $b>0$, 则 $ab<0$, 又 $a^2>0$, 且 $b^2>0$, 没有与之对应的选项. 故选 AB.

5. D 【解析】对 $f(x)=a \cos x - x^2$ 求导, 可得 $f'(x)=-a \sin x - 2x$,

令 $f'(x)=0$, 即 $-a \sin x - 2x=0$, 移项可得 $a \sin x = -2x$,

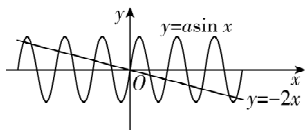
则 $f(x)$ 的极值点个数就等于 $f'(x)$ 的变号零点个数.

当 $a=0$ 时, $y=a \sin x=0$, $y=-2x$ 与 $y=0$ 的图象只有一个交点 $(0,0)$, 且在该点两侧导数值的符号不同, 所以此时 $f(x)$ 有 1 个极值点;

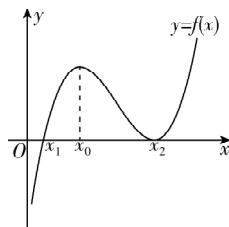
当 $a \neq 0$ 时, $y=a \sin x$ 与 $y=-2x$ 都是奇函数, 图象都关于原点对称, $y=a \sin x$ 是周期函数, $y=-2x$ 是过原点的直线.

随着 a 的取值不同, 由正弦型函数的对称性及有界性可知, 两函数图象的交点(交点左、右两侧两函数的函数值的大小关系不同)个数只能是有限个, 且是奇数个,

所以该函数可能恰有 2 025 个极值点, 不可能恰有 2 026 个极值点. 故选 D.



6. 4 【解析】因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有一个极大值点 x_0 , 所以该函数必有一个极小值点, 且极小值点大于 x_0 , 又 $f(x)$ 仅有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1<x_0<x_2$, 作出 $f(x)$ 的大致图象如图,



所以 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)^2$, 所以 $f'(x)=(x-x_2)^2+2(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_2)(x-x_2+2x-2x_1)=(x-x_2)(3x-2x_1-x_2)$, 令 $f'(x)=0$, 可得 $x=x_2$ 或 $x=\frac{2x_1+x_2}{3}=x_0$, 即 $3x_0=2x_1+x_2$, 两边平

点悟: 极值点处的导数值为 0

方得 $9x_0^2=4x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$, 又 $x_0^2=x_1x_2$, 所以 $4x_1^2+x_2^2-5x_1x_2=0$, 两边同时除以 x_1^2 , 得 $4+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2-5 \cdot \frac{x_2}{x_1}=0$, 解得 $\frac{x_2}{x_1}=1$

或 $\frac{x_2}{x_1}=4$, 又 $x_1<x_2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1}=4$.

7. (1) 【解】 $f(x)=ax-a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)=\frac{ax-1}{x}<0$ 恒成立, 故

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{1}{a}$, 当

$f'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递

减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【证明】 当 $a=1$ 时, $g(x)=xf(x)=x^2-x \ln x$, $g'(x)=2x-1-1 \ln x=2x-2-\ln x$,

记 $t(x)=2x-2-\ln x(x>0)$, 则 $t'(x)=2-\frac{1}{x}$,

令 $t'(x)<0$, 解得 $x \in (0, \frac{1}{2})$, 令

$t'(x)>0$, 解得 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$,

所以 $t(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $t(x)_{\min}=t(\frac{1}{2})=\ln 2-1<0$, 又

$x \rightarrow 0^+$ 时, $t(x) \rightarrow +\infty$, $t(1)=0$,

从而 $t(x)=0$ 有两个不同的解, 即 $g'(x)=0$ 有两个不同的解, 且两个零

点分别为 $x_0, 1$, 其中 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$,

令 $g'(x)>0$, 解得 $x \in (0, x_0) \cup (1,$

$+\infty$);令 $g'(x) < 0$, 解得 $x \in (x_0, 1)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $2x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$, 即 $\ln x_0 = 2x_0 - 2$, $g(x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0 \ln x_0 = x_0^2 - x_0 - x_0(2x_0 - 2) = x_0 - x_0^2 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$,

悟: 研究函数值的取值范围, 优先考虑利用函数单调性, 通过自变量的取值范围得到函数值的取值范围

由 $x_0 < \frac{1}{2}$ 可知 $g(x_0) < \frac{1}{4} = 2^{-2}$.

由 $g'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - 2 + 1 < 0$ 可知 $x_0 < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,

在 $\left(x_0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 所以 $g(x_0) > g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}$.

综上所述, $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < g(x_0) < 2^{-2}$.

素养

8. A 【解析】 $f'(x) = ax - (1 + 2a) + \frac{2}{x} = \frac{(x-2)(ax-1)}{x}$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有极大值, $\therefore \frac{1}{a} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 即 $a \in (1, 2)$, 故选 A.

课时2 函数的最大(小)值

基础

1. D 【解析】 $f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$, $x \in [0, \pi]$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且不恒为

0, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以函数 $f(x)$ 的最大值是 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, 所以函数 $f(x)$ 的最小值是 -1 . 故选 D.

2. A 【解析】由 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{x-1}$, 得 $f'(x) = (x^2 - x - 2)e^{x-1} = (x+1)(x-2)e^{x-1}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 2$,

所以当 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

当 $-1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2) = (2^2 - 3 \times 2 + 1)e = -e$,

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以 $f(2) = -e$ 也是 $f(x)$ 的最小值.

3. 【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = 3x - 4a + \frac{a^2}{x} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{x} = \frac{(3x-a)(x-a)}{x}, x > 0,$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$ 或 $x = \frac{a}{3}$.

① 当 $a = 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{3}$ 或

$x > 1$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $\frac{1}{3} < x < 1$, 故函数

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

此时函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取得极大值, 在 $x = 1$ 处取得极小值, 与函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值不符;

② 当 $\frac{a}{3} = 1$, 即 $a = 3$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得

$0 < x < 1$ 或 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $1 < x < 3$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 在 $x = 3$ 处取得极小值, 符合题意.

所以 $a = 3$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 9 \ln x$,

$$f'(x) = \frac{3(x-1)(x-3)}{x}, x > 0,$$

函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $x \in \left[\frac{1}{e}, 8\right]$, 所以函数 $f(x)$ 在

$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调

递减, 在 $(3, 8)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{3}{2} -$

$$12 = -\frac{21}{2}, \text{ 且 } f(8) = \frac{3}{2} \times 64 - 12 \times 8 +$$

$$9 \ln 8 = 27 \ln 2.$$

因为 $f(8) > f(1)$, 所以 $f(x)_{\max} = f(8) = 27 \ln 2$.

4. D 【解析】 $f(x) = \ln x + x - e^{x-m}$ 的定义

$$\text{域为 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - e^{x-m},$$

易得 $y = f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow -\infty$,

所以存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) =$

$$0, \text{ 即 } \frac{1}{x_0} + 1 = e^{x_0-m},$$

则当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调

递增, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f(x_0) = \ln x_0 + x_0 - e^{x_0-m} = -1$, 即 $\ln x_0 + x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$.

设函数 $g(x) = \ln x + x - \frac{1}{x}$, 则 $g(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 0$,

所以 $x_0 = 1$,

所以 $e^{1-m} = 2$, 解得 $m = 1 - \ln 2$.

5. B 【解析】由函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4 \ln x$, 可得 $f'(x) = -2x + a + \frac{4}{x}$, 其中 $x > 0$.

令 $g(x) = f'(x) = -2x + a + \frac{4}{x}$, 可得

$$g'(x) = -2 - \frac{4}{x^2} < 0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

要使得函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有最大值, 则函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有极大值,

悟: 若函数在开区间上存在最值, 则最值一定是极值

则存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 2)$ 上单调递减, 即 $f'(x)$ 有零点 x_0 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} f'(2) = a - 2 < 0, \\ f'(1) = a + 2 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -2 < a < 2,$$

所以实数 a 的取值范围为 $(-2, 2)$.

6. C 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2x -$

$a \ln(x+1) + 2b(x-1)$ 在 $x = 0$ 处取得

最小值 1,

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值,

$$\text{故 } \begin{cases} f'(0) = 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

又 $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{a}{x+1} + 2$, 所以

$$\begin{cases} f'(0) = -a + 2 = 0, \\ f(0) = 2b = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

将 $a = 2$ 代入导函数中得 $f'(x) = \frac{x}{2} -$

$$\frac{2}{x+1} + 2 = \frac{x(x+5)}{2(x+1)}, x > -1,$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -5$ (舍去), 所以当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调

递增.

因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 也是最

小值点, 符合题意, 所以 $2a + b = 2 \times 2 +$

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

7. 【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2}.$$

因为 $a > 0$, 所以由 $f'(x) > 0$, 可得 $0 < x < a$, 由 $f'(x) < 0$, 可得 $x > a$,

因此函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$.

(2) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 在

$\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递减, 此时 $g(a) =$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - ae;$$

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, a\right]$ 上

单调递增, 在 $(a, e]$ 上单调递减, 此时

$g(a) = f(a) = -\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单

调递增,此时 $g(a)=f(e)=\frac{a}{e}$.

$$g(a)=\begin{cases} 2-ae, & 0 < a \leq \frac{1}{e}, \\ -\ln a, & \frac{1}{e} < a < e, \\ \frac{a}{e}, & a \geq e. \end{cases}$$

8. A 【解析】令 $g(x)=f(x)-1=e^x-ax^2-x-1, x \geq 0$, 则 $g'(x)=e^x-2ax-1$, 令 $h(x)=e^x-2ax-1, x \geq 0$, 则 $h'(x)=e^x-2a$.

因为当 $x \geq 0$ 时, $e^x \geq 1$,

所以当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$ 且等号不恒

成立,此时 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $g'(x) \geq g'(0)=0$, 且等号不恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0)=0$, 即 $f(x) \geq 1$, 满足题意;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x)=e^x-2a=0 \Rightarrow x=\ln(2a) > 0$,

所以当 $0 < x < \ln(2a)$ 时, $h'(x) < 0$, $g'(x)$ 单调递减, 此时 $g'(x) < g'(0)=0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2a))$ 上单调递减, 所以 $g(x) < g(0)=0$, 即 $f(x) < 1$, 不满足题意.

因此实数 a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

故选 A.

9. B 【解析】由题意得, $k > \frac{\ln x}{x} + 4$ 在

$(1, +\infty)$ 上恒成立, 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x} + 4$,

$x \in (1, +\infty)$, 则 $k > g(x)_{\max}$. $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 当

$x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调

递减, $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e} + 4 \in (4, 5)$,

所以整数 $k \geq 5$, 则整数 k 的最小值为 5. 故选 B.

规律方法 由不等式恒成立 (或能成立) 求参数的常用方法

(1) 对不等式变形, 分离参数, 根据分离参数后的结果, 构造函数, 利用导数求出函数的最值, 进而可求出结果;

(2) 根据不等式, 直接构造函数, 求导后通过对参数分类讨论求函数的最值, 进而得出结果.

10. $2\sqrt{e}$ 【解析】因为 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 所以 $\forall x \in (0, +\infty)$, $n \leq e^x - mx$ 恒成立.

设 $h(x)=e^x - mx$, 所以 $h'(x)=e^x - m$.

当 $m \leq 1$ 时, $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $h(x) > h(0)=1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $n \leq 1$, 则 $m+2n \leq 3$.

当 $m > 1$ 时, 当 $x \in (0, \ln m)$ 时,

$h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增,

所以在 $(0, +\infty)$ 上, $h(x)_{\min}=h(\ln m)=m - m \ln m = m(1 - \ln m)$, 所以 $n \leq m(1 - \ln m)$, 所以 $m+2n \leq m+2m(1 - \ln m)$.

设 $p(m)=m+2m(1 - \ln m)$, $m > 1$, 所以 $p'(m)=1-2\ln m$,

当 $1 < m < \sqrt{e}$ 时, $p'(m) > 0$, 函数 $p(m)$ 单调递增, 当 $m > \sqrt{e}$ 时, $p'(m) < 0$, 函数 $p(m)$ 单调递减,

所以 $p(m)_{\max}=p(\sqrt{e})=2\sqrt{e}$, 故 $m+2n \leq 2\sqrt{e}$.

综上可得, $m+2n$ 的最大值为 $2\sqrt{e}$.

多种解法 $m+2n=2\left(\frac{1}{2}m+n\right)=$

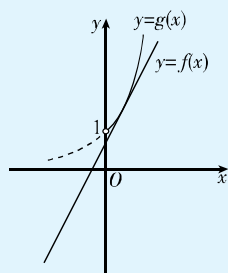
$$2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e},$$

当 $m+2n=2\sqrt{e}$ 时, 需 $f(x) \leq g(x)$ 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right),$$

结合 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象可知, 此时直线 $y=f(x)$ 为曲线 $y=g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线, 又 $g'(x)=e^x$,

$$\text{联立} \begin{cases} m+2n=2\sqrt{e}, \\ m=g'\left(\frac{1}{2}\right), \end{cases} \text{得} \begin{cases} m=\sqrt{e}, \\ n=\frac{\sqrt{e}}{2}. \end{cases}$$



因此 $m+2n$ 的最大值为 $2\sqrt{e}$.

11. 【解】(1) 函数 $f(x)=\ln x, g(x)=1-\frac{1}{x}$,

$$\text{分别求得} f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=\frac{1}{x^2},$$

当 $x=1$ 时, $f'(x)=g'(x)=1$;

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > f'(x) > 1$;

当 $x > 1$ 时, $0 < g'(x) < f'(x) < 1$, 函数 $f(x), g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数, 在区间 $(0, 1)$ 上, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“陡峭”;

在区间 $(1, +\infty)$ 上, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“平缓”,

所以函数 $f(x), g(x)$ 的图象分别对应题图中的 C_2, C_1 .

(2) 由 (1) 及题图知, $f(x) \geq g(x)$, 即

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{证明如下: 设 } h(x) =$$

$$\ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right), \text{求导得 } h'(x) = \frac{1}{x} -$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{x-1}{x^2} <$$

$$0, \text{当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0,$$

函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在

$(1, +\infty)$ 上单调递增, $h(x) \geq h(1) =$

$$0, \text{所以 } \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{即 } f(x) \geq g(x),$$

得证.

名师点拨 一方面, 在学习完用导数研究函数最值后, 我们可以利用最值证明一些函数不等式, 其基本的解题思路为将不等式转化成差函数大于或等于 (小于或等于) 0 的形式, 继而利用导数研究差函数的最小 (大) 值, 证明其大于或等于 (小于或等于) 0 即可;

另一方面, 我们可以通过函数图象直观感受到函数的大小, 但有些性质在草图中无法定量研究, 需要求导去研究, 比如本题两个函数都过点 $(1, 0)$ 且都单调递增, 还都是越增越缓, 那么在此点附近两个函数的大小关系, 就需要比较导数大小得到.

同时, 在研究这些不等式时, 我们也要积累一些常见的不等关系, 在后续利用放缩研究不等式时, 需要用到这些结论, 比如本题所证明的 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

12. (1) 【解】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = 2x - 3 - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = \frac{(2x+1)(x-2)}{x},$$

因为 $x > 0$, 所以 $2x+1 > 0$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$,

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减,

因此 $f(x)$ 只有极小值, 且极小值为 $f(2) = -2 - 2\ln 2$, 无极大值.

(2) 【解】由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, 4]$ 上单调递增,

因此最小值为 $f(2) = -2 - 2\ln 2$, 计算区间端点值 $f(1) = -2, f(4) = 4 - 4\ln 2$,

因为 $0 < \ln 2 < 1 \Rightarrow f(4) = 4 - 4\ln 2 > 0$, 所以 $f(4) > f(1)$,

故 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值为 $f(4) = 4 - 4\ln 2$,

因此 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的值域为 $[-2 - 2\ln 2, 4 - 4\ln 2]$.

(3) 【证明】因为 $f(x) = x^2 - 3x - 2\ln x$,

$$g(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x} - 2,$$

所以由 $f(x) \leq g(x)$, 得 $x^2 - 3x - 2\ln x \leq x^2 - 3x + \frac{2}{x} - 2$, 即 $\ln x + \frac{1}{x} -$

$$1 \geq 0,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

令 $h'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $h'(x) > 0$, 得 $x > 1$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x) \geq h(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$,

即 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$ 恒成立,

所以 $f(x) \leq g(x)$.

13. 【解】 (1) 因为 $f(x) = \frac{e^x(2x-3)}{x+3}$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$,

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \frac{2x-3}{x+3} + e^x \cdot \left(\frac{2x-3}{x+3}\right)' = e^x \cdot \frac{2x-3}{x+3} + e^x \cdot \frac{9}{(x+3)^2} = e^x \cdot \frac{x(2x+3)}{(x+3)^2}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{3}{2}$,

$f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化情况列表如下:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -3)$	+	单调递增
-3	/	/
$(-3, -\frac{3}{2})$	+	单调递增
$-\frac{3}{2}$	0	极大值
$(-\frac{3}{2}, 0)$	-	单调递减
0	0	极小值
$(0, +\infty)$	+	单调递增

由表可得, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$, $(-3, -\frac{3}{2})$, $(0, +\infty)$, 单

调递减区间为 $(-\frac{3}{2}, 0)$.

极大值为 $f(-\frac{3}{2}) = -4e^{-\frac{3}{2}}$, 极小值为 $f(0) = -1$.

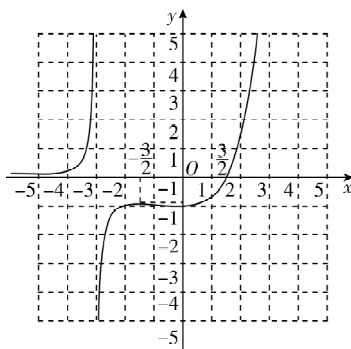
(2) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$,

当 $x \rightarrow -3^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

当 $x \rightarrow -3^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

敲黑板: 仅有单调性和极值无法获得较为准确的图象, 后续研究函数零点信息也不足, 必须把所有单调区间端点处的函数值或极限都求出来, 故函数 $f(x)$ 的大致图象如图.



(3) 方程 $f(x) = a$ 实数解的个数等价于函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 的公共点的个数.

由(2)中 $f(x)$ 的图象可得, 当 $a < -1$ 或 $-4e^{-\frac{3}{2}} < a \leq 0$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 1 个实数解;

当 $a = -1$ 或 $a = -4e^{-\frac{3}{2}}$ 或 $a > 0$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 2 个实数解;

当 $-1 < a < -4e^{-\frac{3}{2}}$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 3 个实数解.

链接教材 本题是教材第 102 页习题 6-2B 第 4 题的同类试题, 考查利用函数的单调性、最值等画出函数的图象后, 研究方程解的个数或函数的零点. 方程解的个数或函数零点问题一般利用导数研究函数的单调性、极值等性质, 并借助函数图象, 判断函数零点或图象的交点情况, 实现形与数的统一.

14. 【解】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 由 $f'(x) = 2ae^{2x} + (2a-2)e^x - 2 = 2(ae^{2x}-1)(e^x+1)$,

①当 $a \leq 0$ 时, $ae^{2x}-1 < 0$, $f'(x) < 0$ 恒成立, 可得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 可得 $x > \ln \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 可得 $x < \ln \frac{1}{a}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减.

(2) ①当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 最多只有一个零点, 不合题意.

②当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$,

且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故若函数 $f(x)$ 有两个零点,

$$\text{则 } f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = a \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 + (2a-2) \times \frac{1}{a} - 2 \ln \frac{1}{a} - 1 = 2 \ln a - \frac{1}{a} + 1 < 0.$$

设函数 $g(a) = 2 \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 求得

$$g'(a) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} = \frac{1+2a}{a^2} > 0,$$

$\therefore g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 0$.

$\therefore$ 当 $0 < a < 1$ 时, $g(a) < g(1) = 0$, 即 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0$.

故实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

刷提升

1. C 【解析】 由已知得 $f'(x) = -3x^2 +$

$4x = -x(3x-4)$. 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < 0$; 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{4}{3}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{4}{3})$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$, $(\frac{4}{3}, +\infty)$ 上单调递减.

对于选项 A, 取 $[a, b] = [-1, 3]$, 易知 $f(x)$ 的极值点为 $0, \frac{4}{3}$, 且 $f(0) = 3$,

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{113}{27}, \text{ 而 } f(-1) = 6, f(3) = -6,$$

所以 $0, \frac{4}{3}$ 既不是最小值点也不是最

大值点, 故 A 错误;

对于选项 B, 取 $[a, b] = [2, 3]$, 则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减, 因此 2, 3 是最值点, 但不是极值点, 故 B 错误;

对于选项 C, 根据 B 可知, $[2, 3]$ 中无极大值点, C 正确;

对于选项 D, 由连续函数在闭区间上一定存在最值知, D 错误. 故选 C.

2. B 【解析】 对函数求导得 $f'(x) = \frac{1-x}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$,

故在 $(0, 1)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

则 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = 0 - \frac{1}{2} < 0$, 故 B 选项满足 $f(x)$ 的图象特征.

3. B 【解析】 由题意得 $f(x_1) - f(x_2) < g(x_1) - g(x_2)$, 即 $f(x_1) - g(x_1) < f(x_2) - g(x_2)$ 对 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$ 恒成立,

设 $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - ax^2$, 则 $h(x)$

悟: 通过构造新函数 $h(x)$, 分析其单调性求参数的范围

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

即 $h'(x) = e^x - 2ax \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq \frac{e^x}{2x}$ 恒成立, 即 $a \leq \left(\frac{e^x}{2x}\right)_{\min}$.

$$\text{设 } v(x) = \frac{e^x}{2x}, \text{ 则 } v'(x) = \frac{e^x(x-1)}{2x^2},$$

令 $v'(x) = 0$, 则 $x = 1$,

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $v'(x) < 0$, $v(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $v'(x) > 0$, $v(x)$ 单调递增,

所以 $v(x)_{\min} = v(1) = \frac{e}{2}$, 所以 $a \leq \frac{e}{2}$.

4. D 【解析】 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰有两个交点等价于方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不同的实数根, 即方程 $x \ln x = ax - 2$ 有两个不同的实数根.

因为 $x > 0$, 所以 $a = \ln x + \frac{2}{x}$,

则问题等价于函数 $y = a$ 与函数 $y = \ln x + \frac{2}{x}$ 的图象有两个不同的交点.

$$\text{令 } h(x) = \ln x + \frac{2}{x} (x > 0),$$

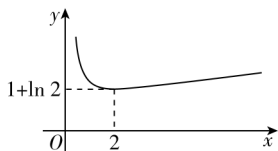
$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2},$$

当 $0 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h(2) = \ln 2 + \frac{2}{2} = 1 + \ln 2.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 则函数 $h(x)$ 的大致图象如图所示,



所以要使得函数 $y = a$ 与函数 $y = \ln x + \frac{2}{x}$ 的图象有两个不同的交点, 则 $a > 1 + \ln 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $(1 + \ln 2, +\infty)$.

- 5. D** 【解析】对命题①: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x-1} \geq (x-1)+1 = x$ 恒成立, 则当 $x > 0$ 时, $\ln e^{x-1} \geq \ln x$, 即 $x-1 \geq \ln x$, 则 $x \geq \ln x+1$, 所以 $e^{x-1} \geq x \geq \ln x+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 且当 $x=1$ 时两个等号均成立, 所以①正确;

对命题②: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{-x} \geq x-a+1$, 两边同乘 e^a 得 $e^x \geq e^a(x-a+1)$, 且当 $x=a$ 时等号成立, 所以②正确;

对命题③: 设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $f'(x) = -\sin x + x$, 设 $h(x) = -\sin x + x$, 则 $h'(x) = -\cos x + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为 0, 所以 $h(x) = -\sin x + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(0) = 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $\forall x \in \mathbf{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$, 且当 $x=0$ 时等号成立, 所以③正确;

对命题④: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以当 $x > 0$ 时, $e^{x+\ln x} \geq x+\ln x+1$, 即 $xe^x \geq x+\ln x+1$, 且当 $x+\ln x=0$ 时等号成立, 所以④正确, 故选 D.

- 6. B** 【解析】设 $f(m) = g(n) = k > 0$, 则有 $e^{m-1} = k$, 解得 $m = \ln k + 1$; $1 + \ln n = k$, 解得 $n = e^{k-1}$. 故 $m-n = \ln k + 1 - e^{k-1}$.

【点悟】将 m, n 都用同一个参数表示出来, 转化为求新函数的最值

令 $h(x) = \ln x + 1 - e^{x-1} (x > 0)$, 则

$$h'(x) = \frac{e-xe^x}{e^x} (x > 0),$$

令 $t(x) = e - xe^x (x > 0)$, 则 $t'(x) =$

$-(1+x)e^x < 0$ 恒成立,

则当 $x > 0$ 时, $t(x) = e - xe^x$ 单调递减, 又 $t(1) = 0$,

则当 $0 < x < 1$ 时, $t(x) > 0$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $t(x) < 0$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

则 $h(x)_{\max} = h(1) = 0$, 则 $\ln k + 1 - e^{k-1}$ 的最大值为 0.

故 $m-n$ 的最大值是 0. 故选 B.

- 7. ACD** 【解析】函数 $f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求导可得 $f'(x) = e^x - a$.

选项 A: 当 $a \leq 0$ 时, 因为 $e^x > 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以 $f'(x) = e^x - a > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数, 故 A 正确;

选项 B: 当 $a \in (0, +\infty)$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 即 $e^x - a = 0$, 解得 $x = \ln a$,

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

因此, 函数 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值, 也是最小值, 无最大值, 故 B 错误;

【敲黑板】连续函数在开区间内无极大值, 则一定无最大值; 有极大值也不一定无最大值

选项 C: 当 $a \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a(1 - \ln a)$,

令 $a(1 - \ln a) = a$, 因为 $a \in (0, +\infty)$, 所以化简可得 $\ln a = 0$, 解得 $a = 1$,

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(x)_{\min} = f(0) = e^0 - a \cdot 0 = 1 = a$, 故 C 正确;

选项 D: 设函数 $g(a) = f(x)_{\min} = a - a \ln a (a > 0)$, 求导可得 $g'(a) = 1 - \ln a - 1 = -\ln a$,

令 $g'(a) = 0$, 即 $-\ln a = 0$, 解得 $a = 1$,

当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) > 0$, 则 $g(a)$ 单调递增,

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $g'(a) < 0$, 则 $g(a)$ 单调递减,

因此, $g(a)$ 在 $a = 1$ 处取得极大值 $g(1) = 1$, 同时 $g(1)$ 也是最大值,

所以对任意 $a \in (0, +\infty)$, $g(a) = f(x)_{\min} \leq 1$, 故 D 正确.

- 8. $[\frac{8}{27}, 2]$** 【解析】由 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$

$$\text{求导得 } f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x\left(x - \frac{a}{3}\right),$$

若 $0 < a \leq 2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 上单

调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(\frac{a}{3})$, 而 $f(0) = 2, f(1) = 4 - a \geq 2 =$

$f(0)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

所以 $M - m = f(1) - f(\frac{a}{3}) = (4 - a) -$

$$\left[2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2\right] = \frac{a^3}{27} - a + 2,$$

设函数 $g(x) = \frac{x^3}{27} - x + 2$, 则 $g'(x) =$

$$\frac{x^2}{9} - 1, \text{ 当 } 0 < x \leq 2 \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 从而}$$

$g(x)$ 单调递减,

则由 $0 < a \leq 2$, 可得 $\frac{8}{27} \leq \frac{a^3}{27} - a + 2 < 2$, 即

$M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 2]$;

若 $2 < a < 3$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 上单

调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(\frac{a}{3})$, 而 $f(0) = 2, f(1) = 4 - a < 2 =$

$f(0)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(0)$,

所以 $M - m = f(0) - f(\frac{a}{3}) = 2 -$

$$\left[2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2\right] = \frac{a^3}{27},$$

由 $2 < a < 3$, 可得 $\frac{8}{27} < \frac{a^3}{27} < 1$, 即 $M - m$ 的

取值范围是 $(\frac{8}{27}, 1)$.

综上, $M - m$ 的取值范围是 $[\frac{8}{27}, 2]$.

- 9. $[e, +\infty)$** 【解析】 $f(x) = \frac{e^x}{ax} - x + \ln x +$

$$\ln a = e^{x-\ln x-\ln a} - (x-\ln x-\ln a),$$

令 $x - \ln x - \ln a = t$, 原式可化为 $g(t) = e^t - t$, $g'(t) = e^t - 1$,

当 $t > 0$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增; 当 $t < 0$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减.

则 $t=0$ 时, $g(t)$ 取得最小值 1, 所以 $x - \ln x - \ln a = 0$ 有解, 即 $x - \ln x = \ln a$ 有解.

记 $h(x) = x - \ln x, x > 0, h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减.

故 $h(x) \geq h(1) = 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

所以 $\ln a \geq 1$, 得 $a \geq e$, 即实数 a 的取值范围为 $[e, +\infty)$.

- 10. 4** 【解析】因为 $e^{a+4b} \leq 4e\sqrt{ab}$, 所以两边同时取以 e 为底的对数, 得

$$\ln e^{a+4b} \leq \ln(4e\sqrt{ab}), \text{ 可得 } a+4b \leq \ln 4 + 1 + \frac{1}{2} \ln ab.$$

因为 a, b 都是正实数, 所以 $a+4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} = 4\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=4b$ 时取等号, 所以 $4\sqrt{ab} \leq$

【敲黑板】应用基本不等式时, 取等条件不要忘记

$$\ln 4 + 1 + \frac{1}{2} \ln ab,$$

所以 $8\sqrt{ab} \leq 2\ln 4 + 2 + \ln ab$, 即 $8\sqrt{ab} - \ln ab \leq 2\ln 4 + 2$.

令 $f(x) = 8\sqrt{x} - \ln x (x > 0)$, 则 $f'(x) =$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{4\sqrt{x}-1}{x},$$

当 $x \in (0, \frac{1}{16})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减,当 $x \in \left(\frac{1}{16}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x) \geq f\left(\frac{1}{16}\right) = 2 + 2\ln 4$, 即

$$8\sqrt{ab} - \ln ab \geq 2 + 2\ln 4,$$

又 $8\sqrt{ab} - \ln ab \leq 2\ln 4 + 2$, 所以 $8\sqrt{ab} - \ln ab = 2\ln 4 + 2$,

此时 $ab = \frac{1}{16}$. 由 $a = 4b$, 可得 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{8}$, 所以 $\frac{a}{b} = 4$.

名师点拨 如果题目条件中出现不等关系,但问题是求值(相等关系),那么可能需要用到夹逼的思想,我们需要构造一个代数式,证明其既大于或等于 C ,还小于或等于 C ,则其等于 C ,然后根据等号成立的条件,即可求解.

本题通过基本不等式构造了一个以 ab 为主元的代数式 $8\sqrt{ab} - \ln ab$,从题目条件中获得其小于或等于 $2\ln 4 + 2$,再根据此代数式的最值得到其大于或等于 $2\ln 4 + 2$,从而得到此式等于 $2\ln 4 + 2$,进而根据等号成立条件求得 a, b 的比值.

11. 【解】(1) 由题意得 $f'(x) = e^x - 1$, $f'(1) = e^1 - 1 = e - 1$, $f(1) = e^1 - 1 - 1 = e - 2$, 故切点坐标为 $(1, e - 2)$.

敲黑板: 求曲线在 $x = a$ 处的切线方程先求出切点坐标

则切线方程为 $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$, 整理得 $y = (e - 1)x - 1$.

$$(2) h(x) = (e^x - x - 1) - (a \ln x - x) = e^x - a \ln x - 1, h'(x) = e^x - \frac{a}{x},$$

由题意得 $h'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 则 $e^x - \frac{a}{x} \geq 0$, 即 $a \leq xe^x$ 在 $[1, 2]$

上恒成立, 故 $a \leq (xe^x)_{\min}$.

令 $m(x) = xe^x$, 则 $m'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$,

因为 $x \in [1, 2]$, 所以 $x + 1 > 0$ 且 $e^x > 0$, 则 $m'(x) > 0$, 故 $m(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $m(x)_{\min} = m(1) = 1 \cdot e^1 = e$, 因此 $a \leq e$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, e]$.

(3) 由题意得原不等式转化为在 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上, $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max}$.

$f'(x) = e^x - 1$, 因为 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, 所以 $e^x > 1$, $f'(x) = e^x - 1 > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增,

$$f(x)_{\max} = f(1) = e^1 - 1 - 1 = e - 2.$$

$g'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a - x}{x}$, 因为 $a < 0, x > 0$,

所以 $a - x < 0, g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递减,

$$g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{e}\right) = a \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = -a - \frac{1}{e}.$$

因此有 $e - 2 \leq -a - \frac{1}{e}$, 整理得 $a \leq 2 - e - \frac{1}{e}$, 所以实数 a 的取值范围

为 $\left(-\infty, 2 - e - \frac{1}{e}\right]$.

12. 【解】(1) 由题知函数 $f(x) = xe^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x) = xe^x$ 有极小值 $f(-1) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

(2) 由题知函数 $g(x) = x + a \ln x + m$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求导得 $g'(x) =$

$$1 + \frac{a}{x} = \frac{x + a}{x},$$

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a < 0$ 时, 由 $g'(x) < 0$, 得 $x \in (0, -a)$; 由 $g'(x) > 0$, 得 $x \in (-a, +\infty)$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = x + \ln x + m$, 不等式 $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq xe^x - x - \ln x$, 令函数 $h(x) = xe^x - x - \ln x$, 依题意 $\forall x \in (0, +\infty)$, $m \leq h(x)$ 恒成立, 则 $m \leq h(x)_{\min}$,

$$\text{则 } h'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{xe^x + x^2e^x - x - 1}{x} = \frac{(xe^x - 1)(x + 1)}{x},$$

令 $\varphi(x) = xe^x - 1, x > 0$, 求导得 $\varphi'(x) = e^x(x + 1) > 0$, 则函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1 < 0, \varphi(1) = e - 1 >$

0, 则存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $\varphi(x_0) =$

0, 即 $h'(x_0) = 0$, 此时 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0e^{x_0} - x_0 - \ln x_0$, 由 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 得 $x_0 = -\ln x_0$,

则 $h(x_0) = 1 - x_0 + x_0 = 1$, 则 $m \leq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

多种解法 (3) 由题得 $m \leq xe^x - x - \ln x = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) (x > 0)$, 记 $t = x + \ln x (t \in \mathbf{R})$, 令 $h(t) = e^t - t$, 则 $h'(t) = e^t - 1$,

当 $t < 0$ 时, $h'(t) < 0, h(t)$ 单调递减, 当 $t > 0$ 时, $h'(t) > 0, h(t)$ 单调递增, 则 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$, 则 $m \leq 1$. 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

刷素养

13. 【解】令 $f(x) = x^3 + ax^2 - (1 - a)^2$, 则 $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{2a}{3}$.

因为关于 x 的方程 $x^3 + ax^2 - (1 - a)^2 = 0$ 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 ,

所以 $f(0)f\left(-\frac{2a}{3}\right) < 0$, 且 $a \neq 0$,

所以 $-(1 - a)^2 \left[\frac{4}{27}a^3 - (1 - a)^2\right] < 0$, 即 $(a - 1)^2(a - 3)^2(4a - 3) > 0$, 解得 $a > \frac{3}{4}$, 且 $a \neq 1, a \neq 3$.

根据一元三次方程根与系数的关系,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = (1 - a)^2, \end{cases}$$

悟: 一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$, 设其三个根为 x_1, x_2, x_3 , 由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$,

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

所以 $\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} = \frac{a^2}{(1 - a)^2} > \frac{3}{2}$, 解得 $3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6}$, 且 $a \neq 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup (1, 3) \cup (3, 3 + \sqrt{6})$.

第 6.2 节综合训练

刷能力

1. B 【解析】对 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - x^2 + bx$ 求

导得 $f'(x) = ax^2 - 2x + b$, 因为函数 $f(x)$ 的一个极值点为 2, 所以 $f'(2) = 4a - 4 + b = 0$, 即 $4a + b = 4$.

又 $a > 0, b > 0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}(4a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \geq$

$\frac{1}{4}\left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}\right) = \frac{9}{4}$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $b = 2a = \frac{4}{3}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$. 故选 B.

2. C 【解析】 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$, 因为 $e^x + e^{-x} \geq 2 (x = 0 \text{ 时取等号})$, $-2\cos x \geq -2 (x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 时取等号})$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 且等号不恒成立, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) =$

$e^{-x} - e^x - 2\sin(-x) = -(e^x - e^{-x} - 2\sin x) = -f(x)$,
所以 $f(x)$ 为奇函数.
不等式 $f(x^2+x) + f(1-t) \geq 0$ 可转化为
 $f(x^2+x) \geq f(t-1) \Rightarrow x^2+x \geq t-1$,
所以 $t \leq x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,
即 $t \leq \frac{3}{4}$.

3. B 【解析】因为函数 $h(x) = e^{x+b} - \ln x$,
所以 $h'(x) = e^{x+b} - \frac{1}{x}$, 又函数 $y = e^{x+b}$,
 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以
 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
又因为 $x \rightarrow 0$ 时, $h'(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$
时, $h'(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$,
使得 $h'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0+b} = \frac{1}{x_0}$,
所以 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单
调递减, $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,
 $h(x)$ 单调递增,
所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = e^{x_0+b} - \ln x_0 =$
 $\frac{1}{x_0} - \ln x_0$, 所以 $3 - \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{x_0} - \ln x_0$,
又因为 $g(x_0) = \frac{1}{x_0} - \ln x_0$ 在 $(0, +\infty)$
上单调递减, 所以 $x_0 = \frac{1}{3}$, 所以 $e^{\frac{1}{3}+b} =$
3, 则 $b = \ln 3 - \frac{1}{3}$.

4. B 【解析】设 $g(x) = x^3 f(x)$, 则 $g'(x) =$
 $3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$. **点悟:** 遇到由 $f(x)$
和 $f'(x)$ 组合的式子 $nf(x) + x^n f'(x)$ 尝试构
建新函数 $y = x^n f(x)$
 $3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) +$
 $xf'(x)] > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上
单调递增, 则 $g(10) < g(20)$, 即
 $1\,000f(10) < 8\,000f(20)$, 所以 $f(10) <$
 $8f(20)$.

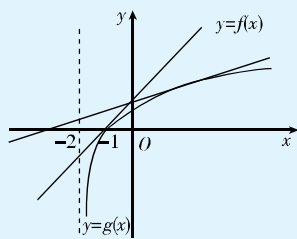
5. B 【解析】因为 $f(x)$ 有零点, 所以方
程 $f(x) = 0$ 有解, 即 $x-a=0$ 在 $(0, 4)$
上有解, 所以 $a \in (0, 4)$. 又 $f'(x) =$
 $\frac{x^2+(1-a)x+1}{(x+1)^2} e^x$ 且 $f(x)$ 是单调函数,
令 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1$, 则函数
 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \geq 0$ 在 $(0, 4)$ 上恒
成立或 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \leq 0$ 在
 $(0, 4)$ 上恒成立.
因为 $g(0) = 1 > 0$, 所以 $g(x) = x^2 + (1-$
 $a)x + 1 \leq 0$ 在 $(0, 4)$ 上不可能恒成立,
即函数 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \geq 0$ 在
 $(0, 4)$ 上恒成立, 即 $x + \frac{1}{x} + 1 - a \geq 0$ 在
 $(0, 4)$ 上恒成立.
因为 $x + \frac{1}{x} + 1 - a \geq 3 - a$ (当且仅当 $x = 1$
时等号成立), 所以 $3 - a \geq 0$, 解得
 $a \leq 3$.
综上, 实数 a 的取值范围是 $(0, 3]$. 故
选 B.

6. A 【解析】不等式 $\ln \frac{b}{3a} > 8^a - 2^b$ 可化

为 $\ln b + 2^b > \ln(3a) + 2^{3a}$, 令 $f(x) =$
 $\ln x + 2^x (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 >$
0, 则函数 $f(x) = \ln x + 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上
单调递增, 由 $f(b) > f(3a)$ 可得 $b > 3a$,
故选 A.

7. B 【解析】由题意, $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow$
 $f(x) - g(x) \geq 0$, 令 $t(x) = f(x) - g(x) =$
 $ax + b - \ln(x+2) (x > -2)$,
则 $\forall x > -2, f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 即
 $t(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $t(x)_{\min} \geq 0$,
 $t'(x) = a - \frac{1}{x+2} = \frac{ax+2a-1}{x+2} (x > -2)$, 令
 $t'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1-2a}{a} = \frac{1}{a} - 2 > -2$,
令 $t'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1-2a}{a}$, 则 $t(x)$ 在
 $(\frac{1-2a}{a}, +\infty)$ 上单调递增;
令 $t'(x) < 0$ 得 $-2 < x < \frac{1-2a}{a}$, 则 $t(x)$ 在
 $(-2, \frac{1-2a}{a})$ 上单调递减.
 $\therefore t(x)_{\min} = t(\frac{1}{a} - 2) \geq 0 \Rightarrow 1 - 2a + b +$
 $\ln a \geq 0, \therefore b \geq 2a - 1 - \ln a, \therefore \frac{b}{a} \geq$
 $2 - \frac{\ln a + 1}{a}$.
令 $h(a) = 2 - \frac{\ln a + 1}{a}, \therefore h'(a) = \frac{\ln a}{a^2}$,
令 $h'(a) > 0$ 得 $a > 1$, 则 $h(a)$ 在 $(1,$
 $+\infty)$ 上单调递增; 令 $h'(a) < 0$ 得 $0 <$
 $a < 1$, 则 $h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,
 $\therefore h(a)_{\min} = h(1) = 1, \therefore \frac{b}{a} \geq 1$, 即 $\frac{b}{a}$
的取值范围为 $[1, +\infty)$. 故选 B.

多种解法 $f(x) = ax + b$ 为一条直
线, 其与 x 轴交于点 $P(-\frac{b}{a}, 0)$, 即
 $x_p = -\frac{b}{a}$. 则要求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围可求
 x_p 的取值范围.
 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 即直线 $y = f(x)$
恒在曲线 $y = g(x)$ 的上方或与曲线
 $y = g(x)$ 相切, 作出 $y = g(x)$ 的图象与
 x 轴交于点 $(-1, 0)$, 临界情况为直线
 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 相切且交
 x 轴于点 $(-1, 0)$, 要使 $f(x) \geq g(x)$ 恒
成立, 则有 $x_p \leq -1$, 故 $\frac{b}{a} \geq 1$.

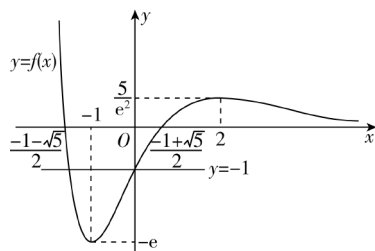


8. ACD 【解析】 $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{e^x} =$
 $\frac{-(x-2)(x+1)}{e^x}$,

由 $f'(x) < 0$ 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$, 由
 $f'(x) > 0$ 解得 $-1 < x < 2$,
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上
单调递减, 在 $(-1, 2)$ 上单调递增, 则
 $-1, 2$ 分别是 $f(x)$ 的极小值点和极大
值点, A 正确.

当 $k = 0$ 时, 令 $f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^x} = 0$, 即
 $x^2+x-1=0$, 解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,
所以此时关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有且
仅有两个实根, 故 B 错误.

$f(-1) = -e, f(2) = \frac{5}{e^2}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时,
 $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$,
结合函数 $f(x)$ 的单调性画出函数
 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于关于 x 的方程 $f(f(x)) = -1$, 令
 $t = f(x)$, 注意到 $f(0) = -1$,
观察图象可知 $f(t) = -1$ 有两根, 设为
 t_1, t_2 , 且规定 $t_1 < t_2$,

则有 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < t_1 < -1 < 0 = t_2$, 其中
 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 是 $f(x)$ 的一个零点, 若 $f(x) =$
 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 则有两个根 $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 =$
 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 若 $f(x) = t_1$, 而 $-e < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} <$
 $t_1 < -1 < 0 = t_2$,
观察图象可知 $f(x) = t_1$ 也有两个根.
综上所述, 关于 x 的方程 $f(f(x)) = -1$
共有 4 个实根, 故 C 正确.

由于 $f(1) + f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0 = a +$
 $(-a)$, 故 $f(1) < a$ 或 $f(-1) < -a$,

点悟: 否则 $f(1) \geq a$ 且
 $f(-1) \geq -a$, 则 $f(1) + f(-1) \geq a + (-a) = 0$,
这与 $f(1) + f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0$ 矛盾
即 $f(1) < a \cdot 1$ 或 $f(-1) < a \cdot (-1)$, 又
 $f(0) = -1 < 0 = a \cdot 0$ 恒成立, 故 $f(x) \leq$
 ax 至少有两个整数解, D 正确. 故
选 ACD.

9. (1)【解】 对 $g(x)$ 求导得 $g'(x) = b +$
 $\frac{1}{x} = \frac{bx+1}{x}$, 因为 $x \geq 1$,
所以当 $b \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在
 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $b < 0$ 时, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = -\frac{1}{b} > 0$,
若 $0 < -\frac{1}{b} \leq 1$, 即 $b \leq -1$, 当 $x \geq 1$ 时,

$bx+1 \leq 0$, 则 $g'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

若 $-\frac{1}{b} > 1$, 即 $-1 < b < 0$, 当 $x \in$

$\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$

单调递减.

综上所述: 当 $b \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $b \leq -1$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $-1 < b < 0$ 时, $g(x)$ 在 $\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 上单

调递增, 在 $\left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 【证明】当 $b=1$ 时, $g(x)=x+\ln x$, 要证 $f(x) \geq g(x)+1$, 即证 $x(e^{2x}-a)-(x+\ln x) \geq 1$,

又因为 $a \leq 1$, 所以 $-a \geq -1$, 所以 $e^{2x}-a \geq e^{2x}-1$, 又 $x > 0$, 即证 $x(e^{2x}-1)-(x+\ln x) \geq 1$.

☞ 悟: 放缩法的应用

$\ln x) \geq 1$.

设 $\varphi(x) = x(e^{2x}-1)-(x+\ln x) = xe^{2x}-2x-\ln x (x > 0)$,

则 $\varphi'(x) = (2x+1)\left(e^{2x}-\frac{1}{x}\right)$,

设 $m(x) = e^{2x}-\frac{1}{x} (x > 0)$,

所以 $m'(x) = 2e^{2x}+\frac{1}{x^2} > 0$, 且 $m\left(\frac{1}{4}\right) =$

$\sqrt{e}-4 < 0, m(1) = e^2-1 > 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 使 $m(x_0) = 0$, 即

使 $\varphi'(x_0) = (2x_0+1)\left(e^{2x_0}-\frac{1}{x_0}\right) = 0$, 即

$e^{2x_0}-\frac{1}{x_0} = 0$,

则 $\ln e^{2x_0} = \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0} =$

$-\ln x_0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = x_0 e^{2x_0} - 2x_0 -$

$\ln x_0 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 2x_0 + 2x_0 = 1$,

所以 $\varphi(x) \geq 1$, 得证.

多种解法

(2) 当 $a \leq 1$ 时, $f(x) \geq$

$x(e^{2x}-1) (x > 0)$, 当 $b=1$ 时, $g(x) =$

$x+\ln x$, 即证 $xe^{2x}-x \geq x+1+\ln x$,

即证 $e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x) \geq 1$,

令 $t = 2x+\ln x (t \in \mathbf{R})$, 令 $h(t) = e^t - t$

$(t \in \mathbf{R})$,

则 $h'(t) = e^t - 1$, 由 $h'(t) = 0$ 得 $t = 0$,

当 $t < 0$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减,

当 $t > 0$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增,

则 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$,

即 $e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x) \geq 1$, 得证.

6.3 利用导数解决实际问题

刷基础

1. D 【解析】设两段长分别为 x cm, $(12-x)$ cm, 其中 $0 < x < 12$, 则这两个正

三角形的边长分别为 $\frac{x}{3}$ cm, $\frac{12-x}{3}$ cm, 面

积之和为 $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 +$

$\left(4-\frac{x}{3}\right)^2 \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{8x}{3} + 16 \right)$. 则

$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}x - \frac{8}{3} \right)$, 令 $S'(x) =$

0, 解得 $x = 6$. 当 $0 < x < 6$ 时, $S'(x) < 0$,

当 $6 < x < 12$ 时, $S'(x) > 0$. 则 $x = 6$ 是

$S(x)$ 的极小值点, 也是最小值点, 所以

$S(x)_{\min} = S(6) = 2\sqrt{3}$ cm².

2. C 【解析】设该圆柱底面半径长为 r 千米, 则圆柱底面的周长为 $2\pi r$ 千米, 圆柱的母线长为 $\frac{1-4\pi r}{8}$ 千米,

由 $1-4\pi r > 0$, 解得 $r < \frac{1}{4\pi}$,

$\therefore$ 圆柱的体积 $V(r) = \pi r^2 \times \frac{1-4\pi r}{8} =$

$\frac{\pi(r^2-4\pi r^3)}{8}, 0 < r < \frac{1}{4\pi}$,

$\therefore V'(r) = \frac{\pi(2r-12\pi r^2)}{8} = \frac{\pi r(1-6\pi r)}{4}$.

令 $V'(r) = 0$, 即 $\pi r(1-6\pi r) = 0$, 解得

$r = \frac{1}{6\pi}$,

$\therefore$ 当 $0 < r < \frac{1}{6\pi}$ 时, $V'(r) > 0$, $V(r)$ 单调递

增; 当 $\frac{1}{6\pi} < r < \frac{1}{4\pi}$ 时, $V'(r) < 0$, $V(r)$ 单调

递减, $\therefore$ 当 $r = \frac{1}{6\pi}$ 千米时, $V(r)$ 取到最大值.

3. 144 【解析】设小正方形的边长为 x cm,

则盒子的容积 $V = (10-2x)(16-2x)x =$

$4x^3 - 52x^2 + 160x (0 < x < 5)$,

$V' = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x-20)(x-2)$.

当 $0 < x < 2$ 时, $V' > 0$, 当 $2 < x < 5$ 时,

$V' < 0$. 所以 $x = 2$ 时, V 取得极大值, 也是最

大值, $V_{\max} = (10-4) \times (16-4) \times 2 =$

144 (cm³), 故答案为 144.

4. 【解】(1) 由 $PO_1 = 2$ m 知 $O_1O = 4PO_1 =$

8 m. 因为 $A_1B_1 = AB = 6$ m,

所以正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{\text{锥}} =$

$\frac{1}{3} \cdot A_1B_1^2 \cdot PO_1 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 24$ (m³);

正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V_{\text{柱}} =$

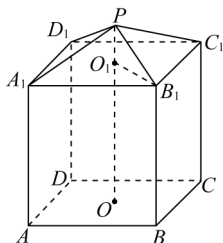
$AB^2 \cdot O_1O = 6^2 \times 8 = 288$ (m³).

所以仓库的容积 $V = V_{\text{锥}} + V_{\text{柱}} = 24 +$

$288 = 312$ (m³).

(2) 设 $A_1B_1 = a$ m, $PO_1 = h$ m, 则 $0 < h <$

6, $O_1O = 4h$ m. 如图, 连接 O_1B_1 .



因为在 Rt $\triangle PO_1B_1$ 中, $O_1B_1^2 + PO_1^2 =$

PB_1^2 , 所以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + h^2 = 36$, 即 $a^2 =$

$2(36-h^2)$.

仓库的容积 $V = V_{\text{柱}} + V_{\text{锥}} = a^2 \cdot 4h + \frac{1}{3}a^2 \cdot$

$h = \frac{13}{3}a^2h = \frac{26}{3} \cdot (36-h^2)$, 其中 $0 < h < 6$,

从而 $V' = \frac{26}{3}(36-3h^2) = 26(12-h^2)$.

令 $V' = 0$, 得 $h = 2\sqrt{3}$ 或 $h = -2\sqrt{3}$ (舍),

当 $0 < h < 2\sqrt{3}$ 时, $V' > 0$, 当 $2\sqrt{3} < h < 6$

时, $V' < 0$. 故当 $h = 2\sqrt{3}$ 时, V 取得极大值, 也是最

大值. 所以当 $PO_1 = 2\sqrt{3}$ m 时, 仓库的容积

最大.

5. C 【解析】设圆柱形蓄水罐的底面半径为 r , 高为 h , 表面积为 y ,

则由题意有 $V = \pi r^2 h$, 所以 $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

则蓄水罐的表面积 $y = \pi r^2 + 2\pi r h =$

$\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r} (r > 0)$.

则 $y' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(\pi r^3 - V)}{r^2}$, 令 $y' = 0$,

解得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

当 $r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$ 时, $y' < 0$, 当 $r \in$

$\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, +\infty\right)$ 时, $y' > 0$, 故当 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

时表面积取得最小值, 即所用的材料最省.

故选 C.

6. 25 【解析】由题可知池底面积为

$\frac{2\,500}{2} = 1\,250$, 为定值, 即池底维修费

用为定值, 则泳池维修费用由池壁维

修费用决定.

又 x 表示较短池壁长, 则 $0 < x \leq$

$\frac{2\,500}{2x} \Rightarrow 0 < x \leq 25\sqrt{2}$, 则池壁维修费用

表达式为 $2x \times \frac{4k}{25x} + \frac{2\,500k}{x^2}$.

设 $f(x) = \frac{8k}{25}x + \frac{2\,500k}{x^2}, 0 < x \leq 25\sqrt{2}$, 则

$f'(x) = \frac{8k}{25} - \frac{5\,000k}{x^3} =$